

## Esercizi - E2A

Ing. Roberto Bucher

31 maggio 2011



# Capitolo 1

## Laplace

### 1.1 Esercizio

Determina la rappresentazione nello spazio degli stati del sistema descritto nella figura 1.1. In seguito determina le funzioni di trasferimento tra  $u_1 - y_1$ ,  $u_1 - y_2$ ,  $u_2 - y_1$  e  $u_2 - y_2$ .

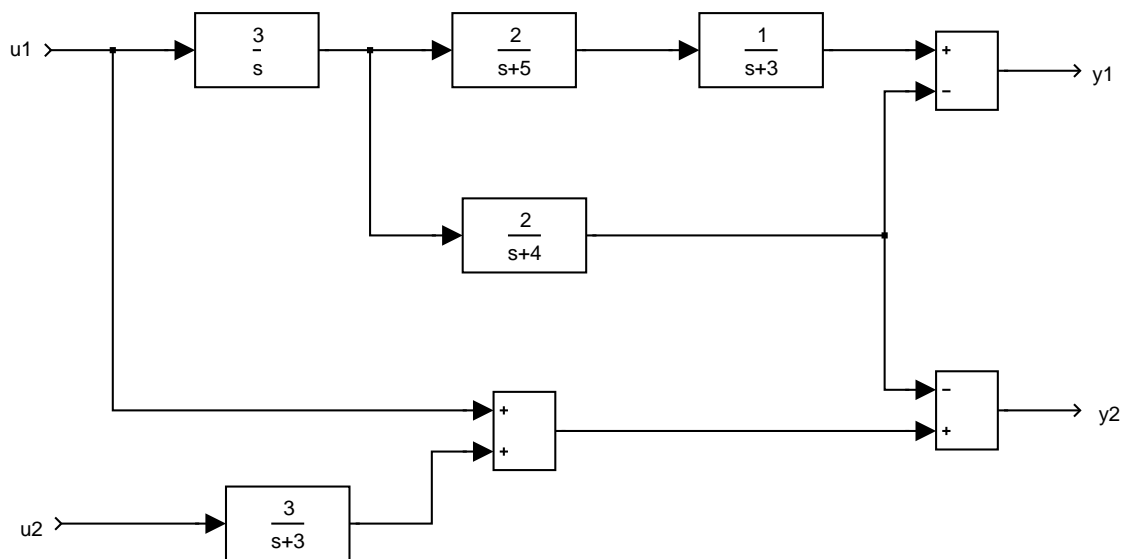


Figura 1.1: Schema dell'esercizio 1.1

**Soluzione:** Per la soluzione possiamo scegliere le variabili di stato come da figura 1.2.

Possiamo ora determinare tutte le equazioni specifiche del sistema e trasformarle in equazioni differenziali di 1. ordine.

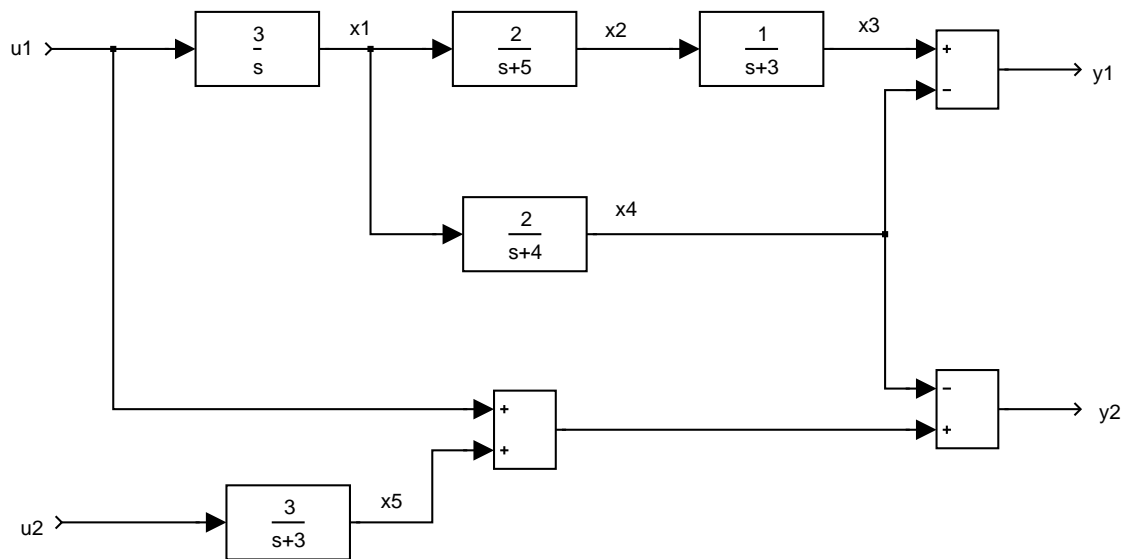


Figura 1.2: Schema dell'esercizio 1.1

$$X_1(s) = \frac{3}{s}U_1(s) \quad sX_1(s) = 3U_1(s) \quad \dot{x}_1 = 3u_1$$

$$X_2(s) = \frac{2}{s+5}X_1(s) \quad (s+5)X_2(s) = 2X_1(s) \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+3}X_2(s) \quad (s+3)X_3(s) = X_2(s) \quad \dot{x}_3 = x_2 - 3x_3$$

$$X_4(s) = \frac{2}{s+4}X_1(s) \quad (s+4)X_4(s) = 2X_1(s) \quad \dot{x}_4 = 2x_1 - 4x_4$$

$$X_5(s) = \frac{3}{s+3}U_2(s) \quad (s+3)X_5(s) = 3U_2(s) \quad \dot{x}_5 = -3x_5 - 3u_2$$

$$y_1 = x_3 - x_4$$

$$y_2 = -x_4 + x_5 + u_1$$

Possiamo ora trascrivere queste equazioni in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Applicando ora la formula

$$\mathbf{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \mathbf{U}(s)$$

Otteniamo la matrice delle funzioni di trasferimento cercate

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6(s^2 + 7s + 11)}{s(s+3)(s+4)(s+5)} & 0 \\ 1 - \frac{6}{s(s+4)} & \frac{3}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

## 1.2 Esercizio

Usa le trasformate di Laplace per determinare la risposta del sistema

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 1$$

con  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 1$ .

**Soluzione:** Utilizzando le regole delle trasformate di Laplace possiamo trasformare l'equazione differenziale in equazione alle differenze.

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3(sX(s) - x(0)) + 2X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = \frac{1}{s} + s + 3$$

$$X(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

La scomposizione in termini di frazioni parziali ci fornisce

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2}$$

Ora possiamo ritrasformare nel tempo ogni singolo termine e si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

### 1.3 Esercizio

L'equazione seguente rappresenta un sistema, con entrata  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ . Rappresenta questa equazione mediante un diagramma a blocchi.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 3y = u$$

**Soluzione:** Possiamo riscrivere l'equazione differenziale nella forma

$$\ddot{y} = u - 6\dot{y} - 3y$$

La figura 1.3 rappresenta lo schema a blocchi del sistema.

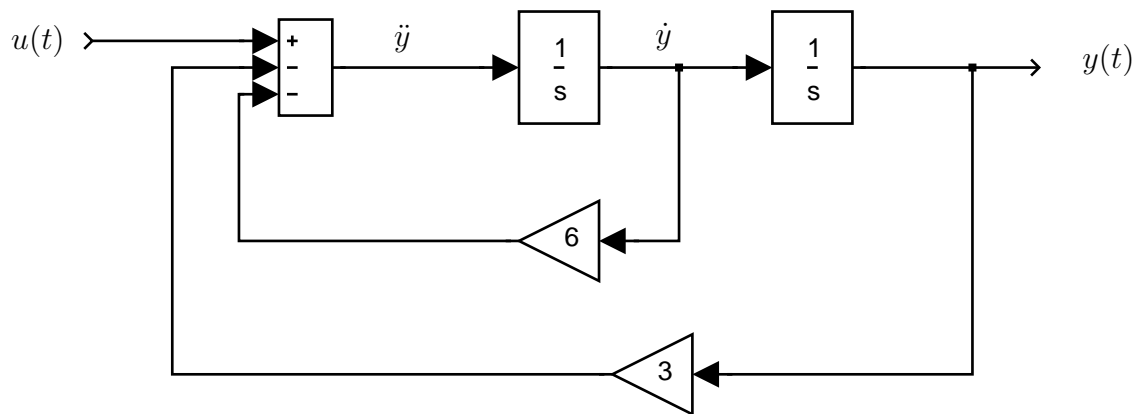


Figura 1.3: Schema dell'esercizio 1.3

## 1.4 Esercizio

Calcola il valore iniziale e finale delle funzioni con le trasformate di Laplace seguenti

$$F_1(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+3)(s+5)^2}$$

$$F_2(s) = \frac{4}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8}$$

**Soluzione:** Applicando il teorema del valore iniziale e finale in Laplace si possono trovare direttamente i valori cercati

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2(s+1)}{s(s+3)(s+5)^2} = \frac{2}{75}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_1(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2(s+1)}{s(s+3)(s+5)^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_2(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{4}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8} = 0$$



## 1.5 Esercizio

Sfruttando unicamente le regole delle trasformate di Laplace determinare l'anti-trasformata della funzione

$$\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

**Soluzione:**

$$\begin{aligned}\frac{s+2}{s^2+2s+5} &= \frac{s+2}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2+4}\end{aligned}$$

Utilizzando il teorema dello spostamento in frequenza e la tabella delle funzioni, possiamo ora ritrasformare nel tempo i due elementi della soluzione.

$$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t)$$

## 1.6 Esercizio

Determinare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$\frac{8}{s^2(s^2 + 4)}$$

**Soluzione:** La scomposizione in termini di frazioni parziali, tenendo conto della radice multipla a 0 vale

$$\frac{8}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}$$

Dal denominatore comune si ottiene

$$\frac{As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Ds^2}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{8}{s^2(s^2 + 4)}$$

Il paragone di coefficienti fornisce la soluzione  $A = 0$ ,  $B = 2$ ,  $C = 0$  e  $D = -2$  e quindi la funzione scomposta diventa

$$\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^2 + 4}$$

che trasformata nel tempo tramite le tabelle diventa

$$2t - \sin(2t)$$

## 1.7 Esercizio

Determinare la funzione di trasferimento tra l'entrata  $U_2(s)$  e l'uscita  $Y_2(s)$  nel sistema dato nello spazio degli stati nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

**Soluzione:** Applicando la formula

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

si ottiene

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+s+2} & \frac{s+2}{s^2+s+2} \\ \frac{-2}{s^2+s+2} & \frac{s-2}{s^2+s+2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento tra l'entrata  $U_2(s)$  e l'uscita  $Y_2(s)$  vale quindi

$$Y_2(s) = \left( \frac{s-2}{s^2+s+2} + 1 \right) U_2(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+s+2} U_2(s)$$

## 1.8 Esercizio

Usa le trasformate di Laplace per determinare la risposta del sistema

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 2$$

con  $x(1) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  e  $\ddot{x}(0) = 0$ .

**Soluzione:** Applicando le regole di Laplace si ottiene

$$\frac{d^3x}{dt^3} \rightarrow s^3X(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow sX(s) - x(0)$$

otteniamo

$$s^3X(s) - s^2 + 2(s^2X(s) - s) + 4(sX(s) - 1) + 5X(s) = \frac{2}{s}$$

$$X(s)(s^3 + 2s^2 + 4s + 5) - s^2 - 2s - 4 = \frac{2}{s}$$

$$X(s)(s^3 + 2s^2 + 4s + 5) = \frac{2}{s} + s^2 + 2s + 4 = \frac{s^3 + 2s^2 + 4s + 2}{s}$$

$$X(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 4s + 2}{s(s^3 + 2s^2 + 4s + 5)}$$

Con la calcolatrice si ottiene

$$x(t) = e^{-0.24t} * (0.197 \cos(1.79t) + 0.368 \sin(1.79t)) + 0.4e^{-1.526t} + 0.4$$

## 1.9 Esercizio

La figura 1.4 rappresenta lo schema a blocchi di un processo.

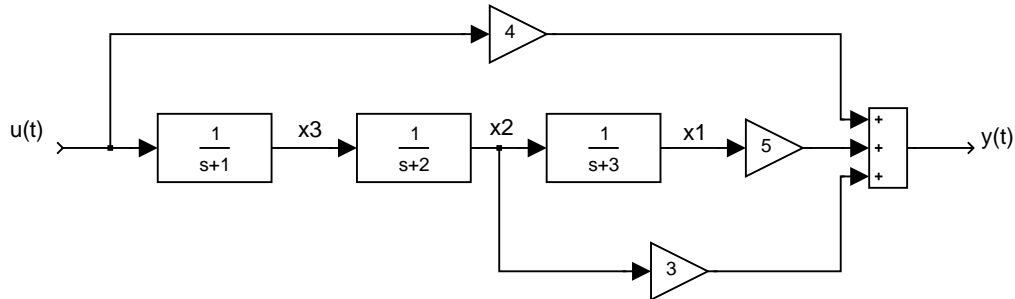


Figura 1.4: Schema a blocchi per l'esercizio 1.9

Determinare

1. La rappresentazione nello spazio degli stati del sistema con le variabili di stato  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  come da schema a blocchi della figura 1.4.
2. La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

**Soluzione:** Le equazioni differenziali sono calcolate tramite

$$X_1(s) = \frac{1}{s+3} \cdot X_2(s) \rightarrow \dot{x}_1(t) = -3 \cdot x_1(t) + x_2(t)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} \cdot X_3(s) \rightarrow \dot{x}_2(t) = -2 \cdot x_2(t) + x_3(t)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+1} \cdot U(s) \rightarrow \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + u(t)$$

e

$$y(t) = 5 \cdot x_1(t) + 3 \cdot x_2(t) + 4 \cdot u(t)$$

In forma matriciale possiamo trovare le 4 matrici  $A, B, C, D$  come

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [5 \quad 3 \quad 0]$$

$$D = 4$$

Applicando la formula

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

troviamo

$$G(s) = \frac{38 + 47s + 24s^2 + 4s^3}{6 + 11s + 6s^2 + s^3}$$

## 1.10 Esercizio

Determina la rappresentazione nello spazio degli stati del sistema descritto nella figura 1.5. In seguito determina le funzioni di trasferimento tra  $U_1(s) \rightarrow Y_1(s)$ , utilizzando entrambi i metodi conosciuti (Mason e ss2g).

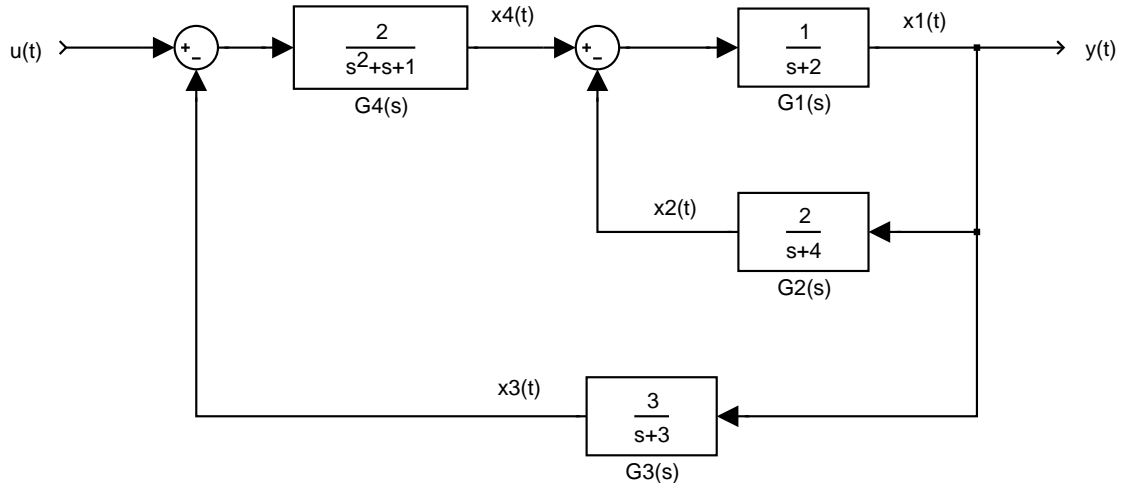


Figura 1.5: Schema dell'esercizio 1.10

**Soluzione:**

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}(-X_2(s) + X_4(s)) \quad \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + x_4$$

$$X_2(s) = \frac{2}{s+4}X_1(s) \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2$$

$$X_3(s) = \frac{3}{s+3}X_1 \quad \dot{x}_3 = 3x_1 - 3x_3$$

$$X_4(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}(U(s) - X_3(s))$$

$$s^2 X_4(s) + s X_4(s) + X_4(s) = -2X_3(s) + 2U(s)$$

con la sostituzione

$$\dot{x}_4 = x_5$$

e quindi

$$X_5(s) = sX_4(s)$$

si ottiene

$$sX_5(s) + X_5(s) + X_4(s) = -2X_3(s) + 2U(s) \quad \dot{x}_5 = -2x_3 - x_4 - x_5 + 2u$$

Possiamo ora trascrivere queste equazioni in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Applicando ora la formula

$$\mathbf{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \mathbf{U}(s)$$

Otteniamo la funzione di trasferimento cercata

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s^2 + 7s + 12)}{s^5 + 10s^4 + 38s^3 + 67s^2 + 64s + 54}$$

Il diagramma di flusso di segnali del sistema è rappresentato nella figura 1.6.

Utilizzando le regole di Mason si vede che ci sono un percorso e 2 loop.

$$P = \frac{2}{s^2 + s + 1} \frac{1}{s + 2}$$

$$L_1 = -\frac{1}{s + 2} \frac{2}{s + 4}$$

e

$$L_2 = -\frac{2}{s^2 + s + 1} \frac{1}{s + 2} \frac{3}{s + 3}$$



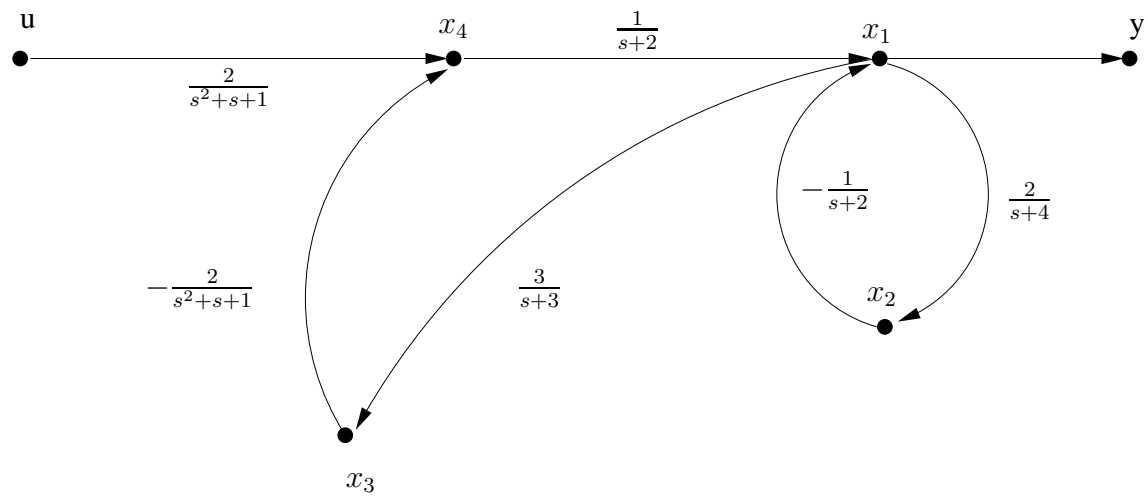


Figura 1.6: Diagramma di flusso

La funzione di trasferimento si calcola con

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P}{1 - L_1 - L_2} = \frac{2(s^2 + 7s + 12)}{s^5 + 10s^4 + 38s^3 + 67s^2 + 64s + 54}$$

### 1.11 Esercizio

Determinare la matrice di transizione degli stati  $\Phi(t)$  associata al sistema seguente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u(t)$$

**Soluzione:**

La soluzione più semplice la si ottiene utilizzando la formula

$$\Phi(t) = L^{-1} [(sI - A)^{-1}]$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Trasformando i singoli elementi della matrice secondo le regole e le tabelle di Laplace si ottiene

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

## 1.12 Esercizio

Viene dato lo schema di figura 1.7.

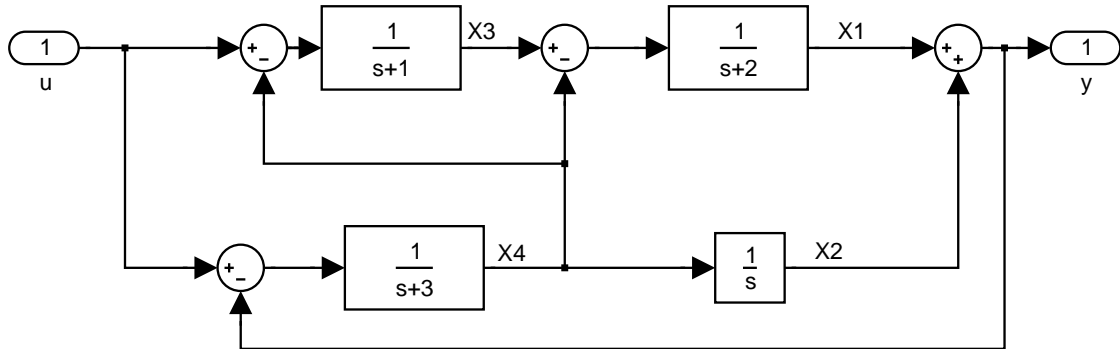


Figura 1.7: Schema dell'esercizio 1.12

Determinare

- La rappresentazione nello spazio degli stati del sistema, utilizzando come variabili di stato le uscite di ogni blocco.
- Rappresentare il sistema mediante un diagramma di flusso di segnali.
- Determinare la funzione di trasferimento globale del sistema dalla descrizione nello spazio degli stati del sistema.
- Determinare la funzione di trasferimento del sistema con le regole di Mason e confrontarlo con il risultato trovato precedentemente.

**Soluzione:** Le equazioni differenziali associate ad ogni funzione di trasferimento sono

$$X_1 = \frac{1}{s+2}(X_3 - X_4) \rightarrow -2 \cdot x_1 + x_3 - x_4$$

$$X_2 = \frac{1}{s}X_4 \rightarrow \dot{x}_2 = x_4$$

$$X_3 = \frac{1}{s+1}(U - X_4) \rightarrow \dot{x}_3 = \dot{x}_1 = -x_3 - x_4 + u$$

$$X_4 = \frac{1}{s+3}(-X_1 - X_2 + U) \rightarrow \dot{x}_4 = -x_1 - x_2 - 3 \cdot x_4 + u$$

In forma matriciale il sistema può essere rappresentato dalle matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = 0$$

La figura 1.8 rappresenta il diagramma di flusso di segnali del sistema.

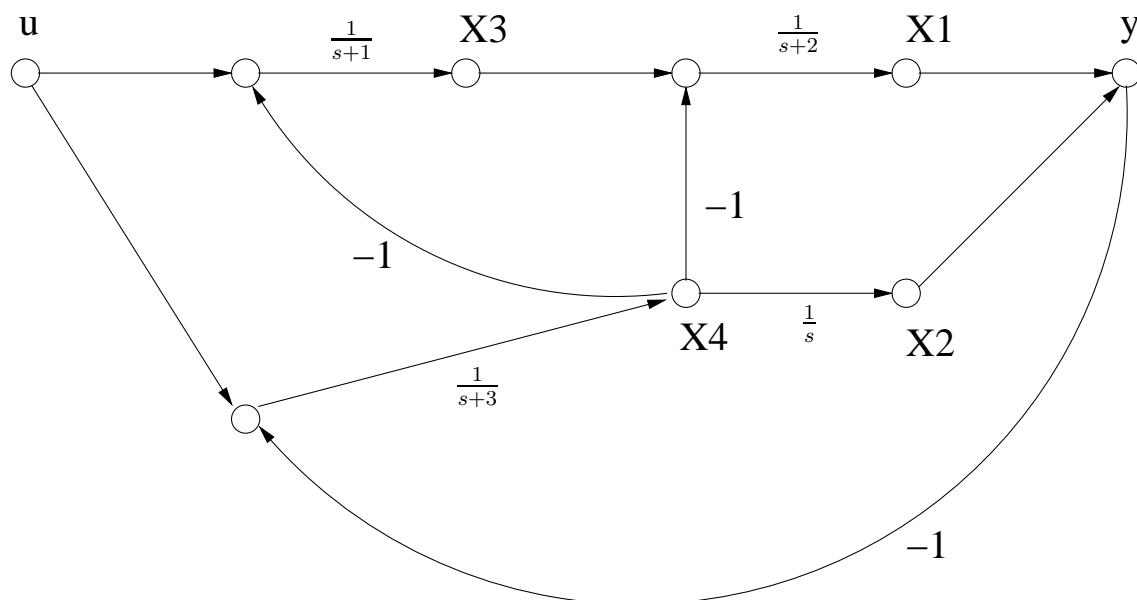


Figura 1.8: Diagramma di flusso di segnali dell'esercizio 1.12

Applicando la formula per il calcolo della funzione di trasferimento si ottiene:

$$G(s) = \frac{2 + 4s + s^2}{2 + 7s + 11s^2 + 6s^3 + s^4}$$

Per il calcolo della funzione di trasferimento con il metodo di Mason troviamo percorsi e loop del diagramma. Ci sono 4 percorsi e 3 loop.

$$P1 = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+2}$$

$$P2 = (-1) \frac{1}{s+3} \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+2}$$

$$P3 = (-1) \frac{1}{s+3} \frac{1}{s+2}$$

$$P4 = \frac{1}{s+3} \frac{1}{s}$$

$$L1 = \frac{1}{s+3} \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+2}$$

$$L2 = \frac{1}{s+3} \frac{1}{s+2}$$

$$L3 = (-1) \frac{1}{s+3} \frac{1}{s}$$

La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{P1 + P2 + P3 + P4}{1 - L1 - L2 - L3} = \frac{2 + 4s + s^2}{2 + 7s + 11s^2 + 6s^3 + s^4}$$

### 1.13 Esercizio

Analizzate il sistema della figura 1.9

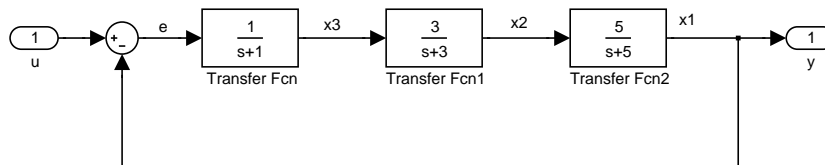


Figura 1.9: Schema per l'esercizio 1.13

1. Disegnate il diagramma di flusso di segnale del sistema utilizzando come nodi le grandezze  $u$ ,  $e$ ,  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$  e  $y$
2. Trovate con le regole di Mason la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
3. Trovate la rappresentazione nello spazio degli stati di questo sistema utilizzando le variabili di stato  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$
4. Determinate la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  partendo dalla rappresentazione nello spazio degli stati e controllatela con quella trovata precedentemente
5. Disegnate il diagramma di flusso di segnali del sistema, partendo dalla rappresentazione nello spazio degli stati, utilizzando quali nodi le grandezze  $u$ ,  $\dot{x}_3$ ,  $x_3$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $x_2$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $x_1$  e  $y$
6. Determinare la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  utilizzando le regole di Mason sullo schema precedente
7. Determinare il valore finale verso cui tende  $y(t)$

**Soluzione:** La figura 1.10 mostra il diagramma di flusso di segnali associato al sistema.

Applicando le regole di Mason vediamo che c'è un percorso

$$P = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{3}{s+3} \cdot \frac{5}{s+5}$$

e un loop

$$L = -\frac{1}{s+1} \cdot \frac{3}{s+3} \cdot \frac{5}{s+5}$$

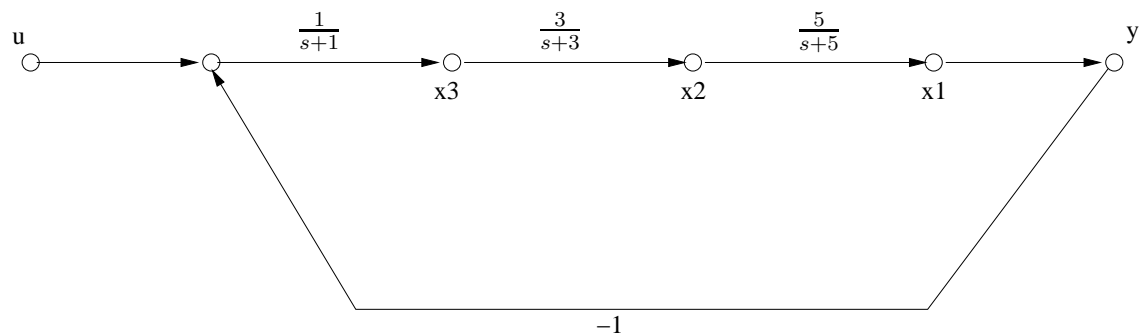


Figura 1.10: Diagramma di flusso di segnali per la risposta 1 dell'esercizio 1.13

La funzione di trasferimento associata vale quindi

$$G(s) = \frac{P}{1-L} = \frac{15}{30 + 23s + 9s^2 + s^3}$$

La rappresentazione di stato del sistema vale

$$X_1(s) = \frac{5}{s+5} \cdot X_2(s) \rightarrow \dot{x}_1 = -5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$X_2(s) = \frac{3}{s+3} \cdot X_3(s) \rightarrow \dot{x}_2 = -3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+1} \cdot (u - X_1(s)) \rightarrow \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 + u$$

Le matrici associate a questo sistema sono

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = 0$$

Applicando la formula di trasformazione si ottiene

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{15}{30 + 23s + 9s^2 + s^3}$$

La figura 1.11 rappresenta il diagramma di flusso di segnali con i nuovi nodi.

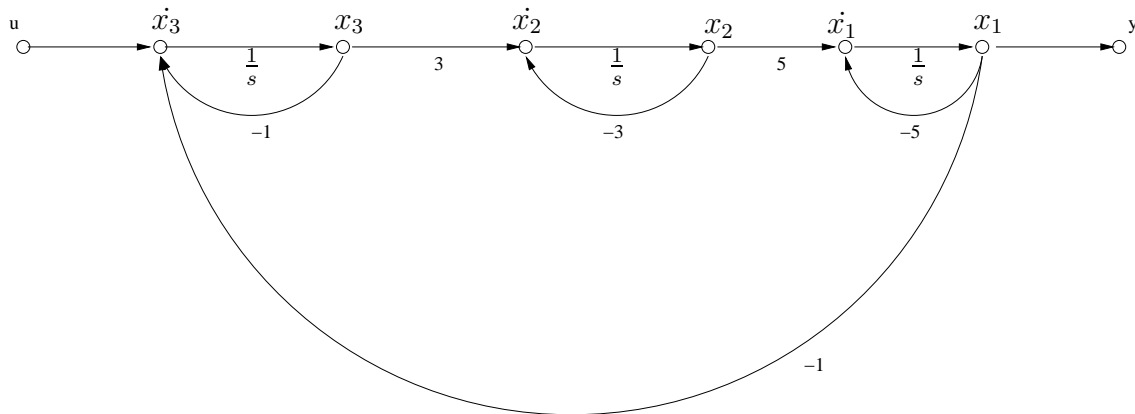


Figura 1.11: Diagramma di flusso di segnali per la risposta 5 dell'esercizio 1.13

Troviamo con questo diagramma un percorso

$$P = \frac{1}{s} \cdot 3 \cdot \frac{1}{s} \cdot 5 \cdot \frac{1}{s} = \frac{15}{s^3}$$

e 4 loop

$$L_1 = \frac{-1}{s}$$

$$L_2 = \frac{-3}{s}$$

$$L_3 = \frac{-5}{s}$$

$$L_4 = -\frac{1}{s} \cdot 3 \cdot \frac{1}{s} \cdot 5 \cdot \frac{1}{s} = \frac{15}{s^3}$$

La funzione di trasferimento diventa quindi



$$G(s) = \frac{P}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3 - L_1L_2L_3}$$

che vale

$$G(s) = \frac{15}{30 + 23s + 9s^2 + s^3}$$

Il valore finale verso cui tende  $y(t)$  può essere calcolato applicando il teorema del valore finale di Laplace:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{15}{30 + 23s + 9s^2 + s^3} = \frac{1}{2}$$

## 1.14 Esercizio

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 1.12 con due sistemi SISO in serie, e un feedback con amplificazione  $K$ . I due sistemi sono descritti nello spazio degli stati e sono caratterizzati dalle matrici  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  per il sistema "SISO1" ( $D_1$  è nulla!), e da  $A_2, B_2, C_2$  e  $D_2$  per il sistema "SISO2" ( $D_2$  non nulla!).

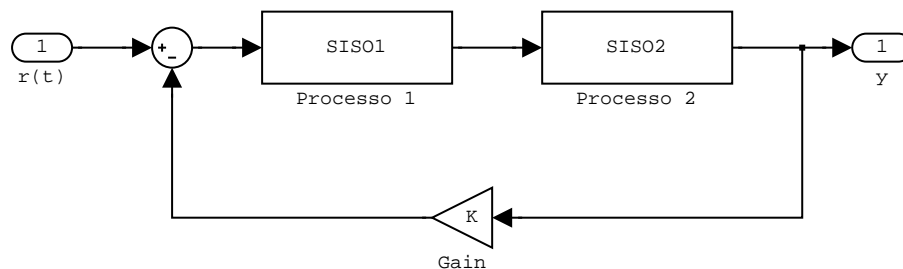


Figura 1.12: Sistema dell'esercizio 1.14

1. Determinare le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  del sistema globale tra entrata  $r(t)$  e uscita  $y(t)$ , in funzione delle matrici  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  e  $K$ .

**Soluzione:** Il primo sistema può essere scritto come

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot u_1 \\ y_1 &= C_1 \cdot x_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot u_2 \\ y_2 &= C_2 \cdot x_2 + D_2 \cdot u_2\end{aligned}$$

Le entrate dei due sistemi valgono

$$u_1 = r - K \cdot y_2 = r - K \cdot (C_2 \cdot x_2 + D_2 \cdot C_1 \cdot x_1)$$

e

$$u_2 = C_1 \cdot x_1$$

sostituendo le entrate nei vari sistemi si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 \cdot K \cdot D_2 \cdot C_1 & -B_1 \cdot K \cdot C_2 \\ B_2 \cdot C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} D_2 \cdot C_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

### 1.15 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 1.13.

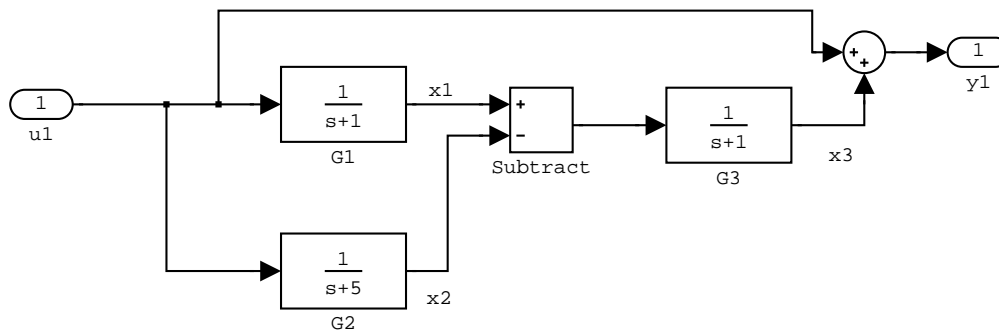


Figura 1.13: Sistema dell'esercizio 1.15

Determinare:

1. La rappresentazione di stato del sistema utilizzando le variabili di stato  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  come da schema dato.
2. La funzione di trasferimento  $G(s)$  tra l'entrata  $u_1$  e l'uscita  $y_1$ .
3. L'equazione differenziale del sistema riferito alla grandezza  $y_1$ .

**Soluzione:** Troviamo le equazioni di stato associate al sistema.

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U_1(s) \rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + u_1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+5}U_1(s) \rightarrow \dot{x}_2 = -5x_2 + u_1$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+1}(X_1(s) - X_2(s)) \rightarrow \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3$$

Le matrici associate al sistema sono

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$D = 1$$

Applicando la formula si trova la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{9 + 11s + 7s^2 + s^3}{5 + 11s + 7s^2 + s^3}$$

L'equazione differenziale associata a questo sistema è

$$y_1^{(3)} + 7\ddot{y}_1 + 11\dot{y}_1 + 5y_1 = u_1^{(3)} + 7\ddot{u}_1 + 11\dot{u}_1 + 9u_1$$

### 1.16 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 1.14.

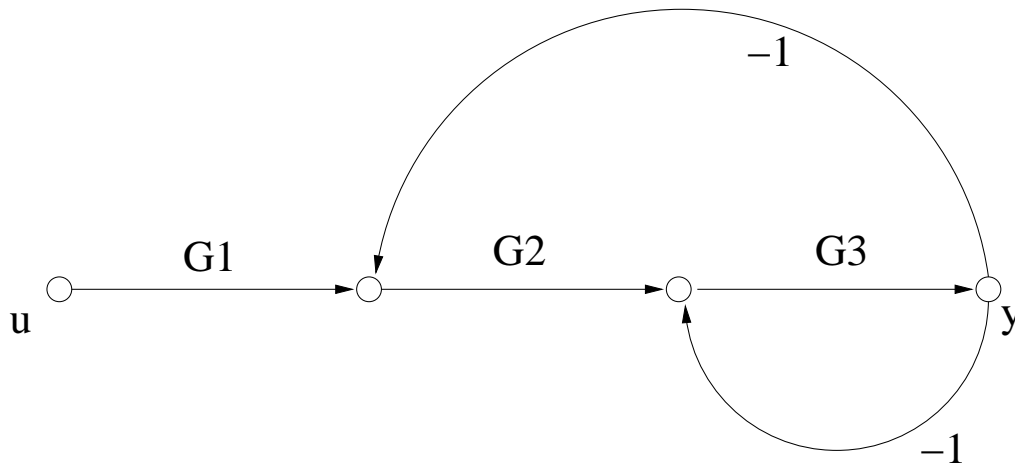


Figura 1.14: Sistema dell'esercizio 1.16

Le funzioni di trasferimento valgono:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad G_2(s) = \frac{2}{s+2} \quad G_3(s) = \frac{1}{s}$$

Determinare:

1. La funzione di trasferimento tra l'entrata  $u$  e l'uscita  $y$  utilizzando le regole di Mason.
2. L'equazione differenziale associata al sistema.
3. Una delle possibili rappresentazioni di stato di questo sistema.

**Soluzione:** Abbiamo un percorso

$$P = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

e due loop

$$L_1 = -G_3$$

$$L_2 = -G_2 \cdot G_3$$

La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{P}{1 - L_1 - L_2} = \frac{2}{4 + 7s + 4s^2 + s^3}$$

L'equazione differenziale del sistema può essere letta direttamente dalla funzione di trasferimento

$$y^{(3)} + 4 \cdot \ddot{y} + 7 \cdot \dot{y} + 4 \cdot y = 2 \cdot u$$

Le matrici seguenti danno una possibile descrizione nello spazio degli stati del sistema e sono costruite direttamente partendo dalla funzione di trasferimento.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [2 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = 0$$

### 1.17 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 1.15.

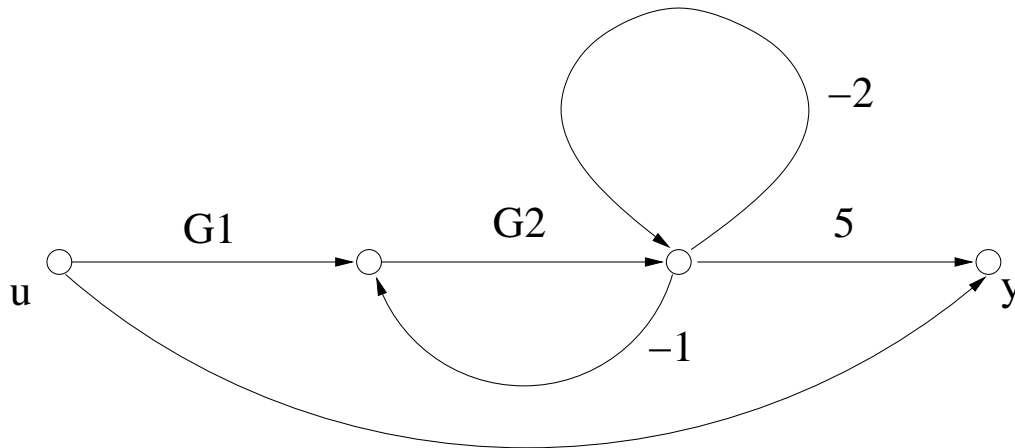


Figura 1.15: Sistema dell'esercizio 1.17

Le funzioni di trasferimento valgono:

$$G1(s) = \frac{1}{s+1} \quad G2(s) = \frac{1}{s}$$

Determinare:

1. La funzione di trasferimento tra l'entrata  $u$  e l'uscita  $y$  utilizzando le regole di Mason.
2. L'equazione differenziale associata al sistema.
3. Una delle possibili rappresentazioni di stato di questo sistema.

**Soluzione:** Ci sono due percorsi

$$P_1 = 5 \cdot G_1 \cdot G_2$$

$$P_2 = 1$$

e due loop

$$L_1 = -2$$

$$L_2 = -G_2$$



La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{2 + 1.3333333s + s^2}{0.3333333 + 1.3333333s + s^2}$$

L'equazione differenziale associata a questa funzione vale

$$3 \cdot \ddot{y} + 4 \cdot \dot{y} + y = 3 \cdot \ddot{u} + 4 \cdot \dot{u} + 6 \cdot u$$

Una possibile rappresentazione di stato è data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3333333 & -1.3333333 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.6666667 \quad 0]$$

$$D = 1$$

### 1.18 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 1.16.

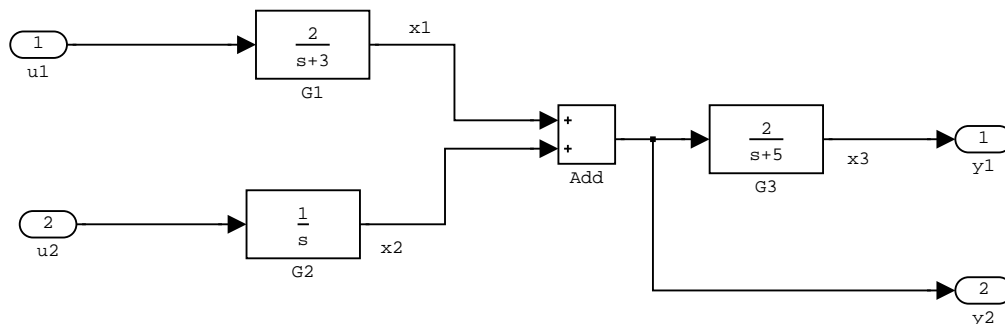


Figura 1.16: Sistema dell'esercizio 1.18

Determinare:

1. La rappresentazione di stato del sistema utilizzando le variabili  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  come da schema.
2. La funzione di trasferimento  $Y_1(s)/U_1(s)$
3. Eqz. differenziale della variabile  $y_1(t)$  con entrata  $u_2(t) = 0$  costante.

**Soluzione:** Scriviamo per prima cosa le equazioni di stato del sistema

$$X_1(s) = \frac{2}{s+3} \cdot U_1(s) \rightarrow \dot{x}_1 = -3 \cdot x_1 + 2 \cdot u_1$$

$$X - 2(s) = \frac{1}{s} \cdot U_2(s) \rightarrow \dot{x}_2 = u_2$$

$$X_3(s) = \frac{2}{s+5} \cdot (X_1(s) + X - 2(s)) \rightarrow \dot{x}_3 = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3$$

$$y_1 = x_3$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

Le matrici associate a questo sistema sono quindi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e le funzioni di trasferimento sono

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{15+8s+s^2} & \frac{2}{5s+s^2} \\ \frac{2}{3+s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento cercata vale

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{4}{15 + 8s + s^2}$$

L'equazione differenziale per l'uscita  $y_1(t)$  con la sola entrata  $u_1(t)$  risulta essere

$$\ddot{y}_1 + 8 \cdot \dot{y}_1 + 15 \cdot y_1 = 2 \cdot u_1$$

### 1.19 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 1.17.

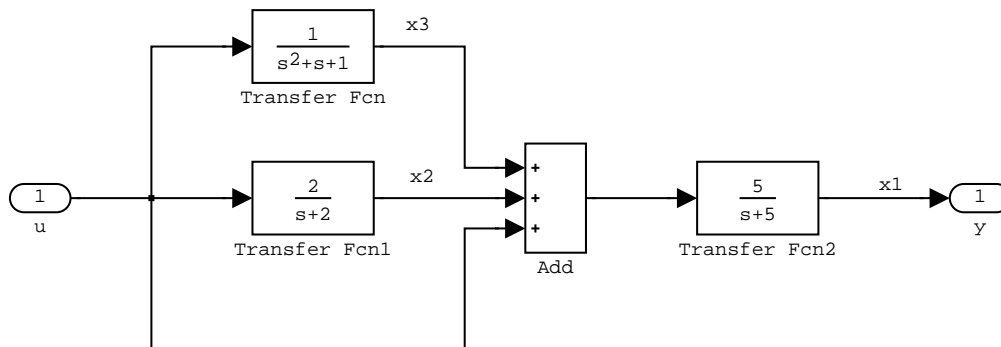


Figura 1.17: Sistema dell'esercizio 1.19

Determinare:

1. La rappresentazione di stato del sistema utilizzando le variabili  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  date nello schema.
2. La funzione di trasferimento  $Y(s)/U(s)$
3. La rappresentazione mediante diagramma di flusso del sistema.

**Soluzione:** La rappresentazione di stato associata a questo sistema è la seguente (attenzione: occorre aggiungere uno stato supplementare per la funzione di trasferimento di 2. ordine)

$$X_1(s) = \frac{5}{s+5}(X_2(s) + X_3(s) + U(s)) \rightarrow \dot{x}_1 = -5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 5 \cdot u$$

$$X_2(s) = \frac{2}{s+2} \cdot U(s) \rightarrow \dot{x}_2 = -2 \cdot x_2 + 2 \cdot u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \cdot U(s) \rightarrow \dot{x}_4 = -x_3 - x_4 + u$$

Le matrici del sistema sono quindi

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = 0$$

La funzione di trasferimento cercata vale

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{30 + 30s + 25s^2 + 5s^3}{10 + 17s + 18s^2 + 8s^3 + s^4}$$

La figura 1.18 mostra il diagramma di flusso di segnali del sistema.

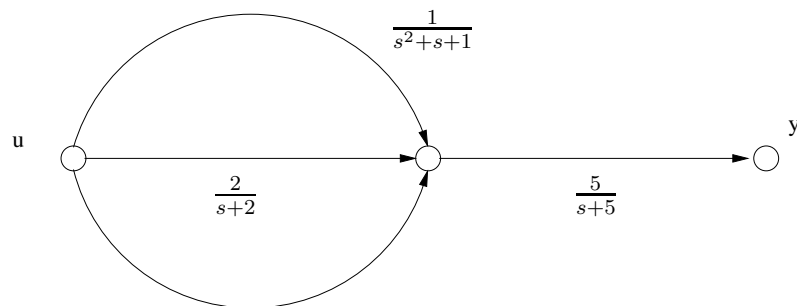


Figura 1.18: Diagramma di flusso di segnali dell'esercizio 1.19

## 1.20 Esercizio

Vengono dati due sistemi in rappresentazione di stato:

$$\dot{x}_1 = A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot u_1$$

$$y_1 = C_1 \cdot x_1$$

e

$$\dot{x}_2 = A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot u_2$$

$$y_2 = C_2 \cdot x_2$$

Determinare la rappresentazione di stato dei due sistemi in parallelo e quella dei due sistemi in feedback unitario, con il secondo sistema sulla linea di feedback.

**Soluzione:** Analizziamo inizialmente i due sistemi in parallelo. L'entrata per entrambi è il segnale  $u(t)$ , mentre l'uscita è la somma delle uscite dei due sistemi. Il sistema globale ha quindi le nuove matrici

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad C_2]$$

$$D = [0]$$

Nel secondo caso dobbiamo inizialmente calcolare le entrate per entrambi i sottosistemi.

Il primo sistema riceve in entrata

$$u_1 = r - y_2 = -C_2 \cdot x_2 + r$$

Il sistema sul feedback riceve in entrata

$$u_2 = y_1 = C_1 \cdot x_1$$

Le nuove matrici del sistema sono quindi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad 0]$$

## 1.21 Sistemi

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 1.19 con due sistemi SISO. I due sistemi sono descritti nello spazio degli stati e sono caratterizzati dalle matrici  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , e da  $A_2, B_2, C_2$  ( $D_1$  e  $D_2$  sono nulle!).

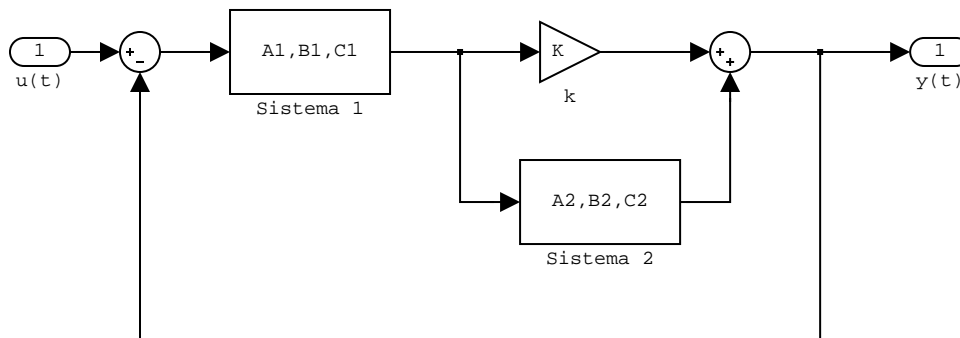


Figura 1.19: Sistema dell'esercizio 1.21

1. Determinare le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  del sistema globale tra entrata  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ , in funzione delle matrici  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $K$ .
2. Determinare la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

per

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \quad 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [1 \quad 0]$$

$$K = 5$$



**Soluzione:** Il primo sistema può essere scritto come

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot u_1 \\ y_1 &= C_1 \cdot x_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot u_2 \\ y_2 &= C_2 \cdot x_2\end{aligned}$$

Le entrate dei due sistemi valgono

$$u_1 = u - K \cdot y_1 - y_2 = u - K \cdot C_1 \cdot x_1 - C_2 \cdot x_2$$

e

$$u_2 = y_1 = C_1 \cdot x_1$$

sostituendo le entrate nei vari sistemi si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 \cdot K \cdot C_1 & -B_1 \cdot C_2 \\ B_2 \cdot C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} K \cdot C_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Per i valori dati le matrici diventano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [5 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$D = 0$$

Applicando la formula si trova la funzione di trasferimento del sistema come

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{11 + 10s + 5s^2}{13 + 14s + 10s^2 + 3s^3 + s^4}$$

## 1.22 Sistemi

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 1.20 con due sistemi SISO. I due sistemi sono descritti nello spazio degli stati e sono caratterizzati dalle matrici  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , e da  $A_2, B_2, C_2$  ( $D_1$  e  $D_2$  sono nulle!).

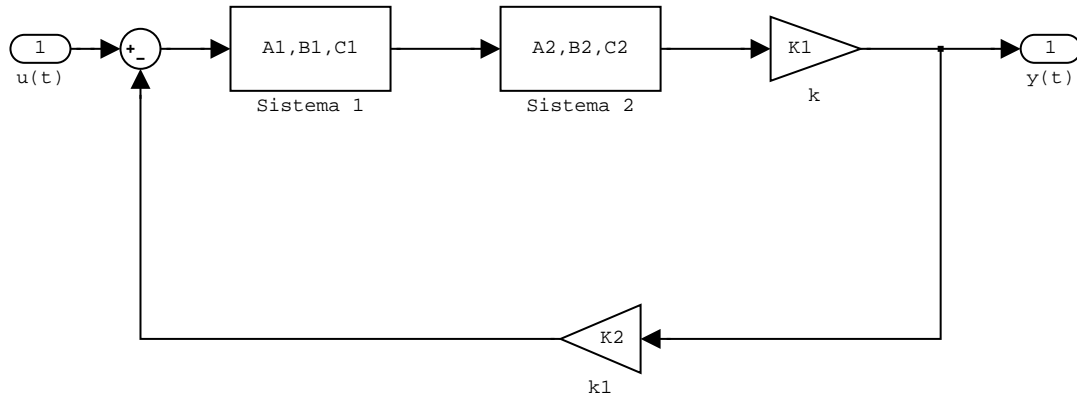


Figura 1.20: Sistema dell'esercizio 1.22

1. Determinare le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  del sistema globale tra entrata  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ , in funzione delle matrici  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2, K_1$  e  $K_2$ .
2. Determinare la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

per

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \quad 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [1 \quad 0]$$

$$K_1 = K_2 = 2$$

**Soluzione:** Il primo sistema può essere scritto come

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot u_1 \\ y_1 &= C_1 \cdot x_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot u_2 \\ y_2 &= C_2 \cdot x_2\end{aligned}$$

Le entrate dei due sistemi valgono

$$u_1 = u - K_1 \cdot K_2 \cdot y_2 = u - K_1 \cdot K_2 \cdot C_2 \cdot x_2$$

e

$$u_2 = y_1 = C_1 \cdot x_1$$

sostituendo le entrate nei vari sistemi si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot C_2 \\ B_2 \cdot C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & K_1 \cdot C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Per i valori dati le matrici diventano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 2 \ 0]$$

$$D = 0$$

Applicando la formula si trova la funzione di trasferimento del sistema come

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{2}{6 + 4s + 5s^2 + 3s^3 + s^4}$$

### 1.23 Sistemi

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 1.21.

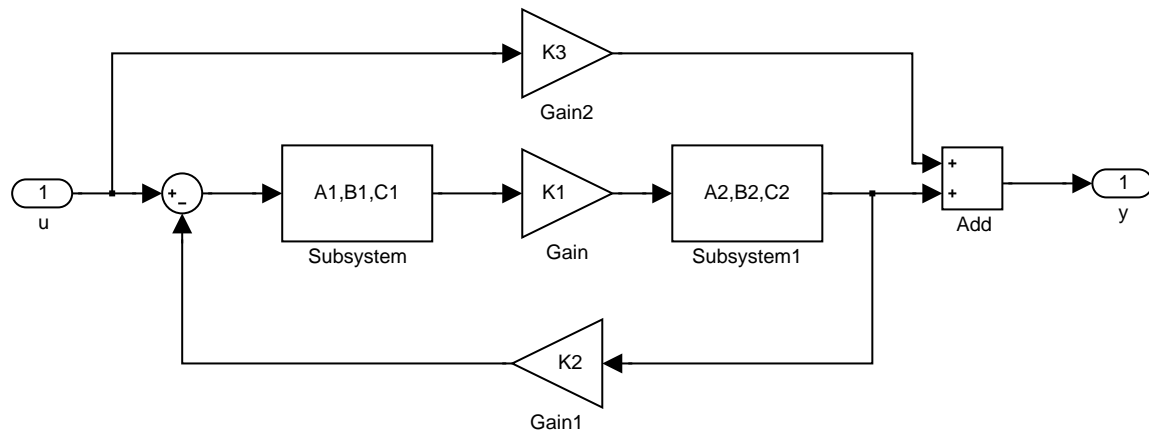


Figura 1.21: Sistema dell'esercizio 1.23

Determinare il sistema globale nello spazio degli stati  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  in funzione delle matrici  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e i guadagni  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ .

**Soluzione:** Il primo sistema può essere scritto come

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot u_1 \\ y_1 &= C_1 \cdot x_1\end{aligned}$$

e il secondo come

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot u_2 \\ y_2 &= C_2 \cdot x_2\end{aligned}$$

Le entrate dei due sistemi valgono

$$u_1 = u - K_2 \cdot y_2 = u - K_2 \cdot C_2 \cdot x_2$$

e

$$u_2 = K_1 \cdot y_1 = K_1 \cdot C_1 \cdot x_1$$

sostituendo le entrate nei vari sistemi si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 \cdot K_2 \cdot C_2 \\ B_2 \cdot K_1 \cdot C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_3 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

## 1.24 Sistemi

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 1.22.

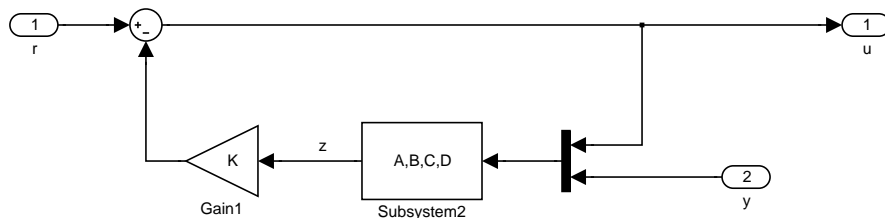


Figura 1.22: Sistema dell'esercizio 1.24

Determinare il sistema globale nello spazio degli stati  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  con le due entrate  $r$  e  $y$  ed una uscita  $u$ .

**Consiglio:** Per il calcolo sostituire la matrice  $B$  del sistema con due matrici  $B_u$  e  $B_y$  e la matrice  $D$  con le matrici  $D_u$  e  $D_y$  relative alle due entrate del sistema.

**Soluzione:** Il primo sistema può essere scritto come

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B_u \cdot u + B_y \cdot y \\ z &= C \cdot x + D_u \cdot u + D_y \cdot y\end{aligned}$$

L'entrata  $u$  può essere riscritta come

$$u = r - K \cdot z = r - K \cdot C \cdot x - K \cdot (D_u \cdot u + D_y \cdot y)$$

che diventa

$$(I + K \cdot D_u)u = r - K \cdot C \cdot x - K \cdot D_y \cdot y$$

da cui si ricava

$$u = (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot r - (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot K \cdot C \cdot x - (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot K \cdot D_y \cdot y$$

Ora occorre solo sostituire i valori nel sistema e si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - B_u \cdot (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot K \cdot C) \cdot x + B_u \cdot (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot r + (B_y - B_u \cdot (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot K \cdot D_y) \cdot y \\ u &= -(I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot K \cdot C \cdot x + (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot r - (I + K \cdot D_u)^{-1} \cdot K \cdot D_y \cdot y\end{aligned}$$



# Capitolo 2

## Modellazione

### 2.1 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 2.1, formato da due masse uguali in traslazione accoppiate tramite una molla.

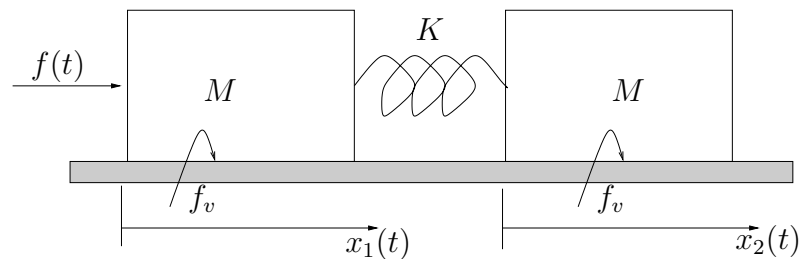


Figura 2.1: Sistema dell'esercizio 2.1

Per determinare la descrizione matematica del sistema è possibile utilizzare il metodo di sovrapposizione che usate già da tempo in elettrotecnica (seguì i passi 1,2,3 e 4 riportati di seguito).

1. Considerate unicamente la massa di sinistra. Disegnatela con tutte le forze che agiscono su di essa, tenendo ferma la massa 2 ( $x_2(t) = 0$ ).
2. Ora considerate la massa 1 ferma ( $x_1(t) = 0$ ) e aggiungete al disegno le forze dovute al movimento della massa 2.
3. Scrivete le equazioni differenziali che descrivono il movimento  $x_1(t)$ , tenendo conto di tutte le forze presenti.
4. Fate ora lo stesso lavoro con la massa 2, e determinate l'equazione differenziale che ne descrive il movimento.
5. Scrivete le equazioni del sistema complessivo nello spazio degli stati.

6. Determinate la funzione di trasferimento tra la forza in entrata  $F(s)$  e la posizione in uscita  $X_2(s)$ .

**Soluzione:** Nelle figure 2.2 sono rappresentate le forze che agiscono sulla massa 1 dovute allo spostamento  $x_1$  (a),  $x_2$  (b) e globale (c).

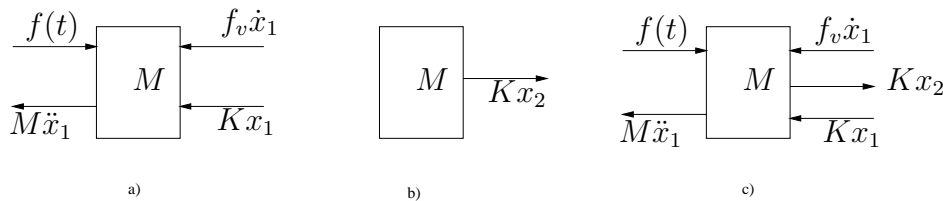


Figura 2.2: Forze agenti sulla massa 1

Nelle figure 2.3 sono rappresentate le forze che agiscono sulla massa 1 dovute allo spostamento  $x_2$  (a),  $x_1$  (b) e globale (c).

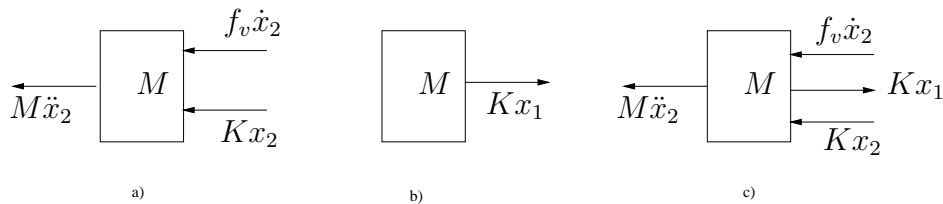


Figura 2.3: Forze agenti sulla massa 2

L'equazione differenziale relativa al movimento della massa 1 può essere presa direttamente dal diagramma delle forze

$$M\ddot{x}_1 = -f_v\dot{x}_1 - Kx_1 + Kx_2 + f(t)$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{K}{M}x_1 + \frac{K}{M}x_2 - \frac{f_v}{M}\dot{x}_1 + \frac{1}{M}f(t)$$

Analogamente è possibile determinare l'equazione differenziale relativa alla massa 2

$$M\ddot{x}_2 = -f_v\dot{x}_2 - Kx_2 + Kx_1$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{K}{M}x_1 - \frac{K}{M}x_2 - \frac{f_v}{M}\dot{x}_2$$

Per portare il tutto ad equazioni differenziali di primo ordine effettuiamo la sostituzione di variabili seguente

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

Si ottiene il sistema seguente nello spazio degli stati

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & \frac{K}{M} & -\frac{f_v}{M} & 0 \\ \frac{K}{M} & -\frac{K}{M} & 0 & -\frac{f_v}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

e

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Applicando la formula

$$\mathbf{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \mathbf{U}(s)$$

Otteniamo la matrice delle funzioni di trasferimento, tra cui anche quella cercata tra  $f(t)$  e  $x_2(t)$ .

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Ms^2 + f_v s + K}{s(M^2 s^3 + 2Mf_v s^2 + (2KM + f_v^2)s + 2Kf_v)} \\ K \\ \frac{K}{s(M^2 s^3 + 2Mf_v s^2 + (2KM + f_v^2)s + 2Kf_v)} \end{bmatrix} F(s)$$

## 2.2 Esercizio

Viene dato il processo della figura 2.4, rappresentante un carrello mosso da un motore (a sinistra) collegato con una puleggia. Il raggio dell'ingranaggio del motore sulla puleggia vale  $r$ , il coefficiente di attrito del carrello vale  $f_v$  (contiene anche quello del motore). L'impedenza dell'armatura  $L_a$  è nulla. Il motore è caratterizzato dalle grandezze  $R_a$ ,  $K_t$  e  $K_b$ , mentre il suo momento di inerzia è trascurabile rispetto alla massa da muovere.

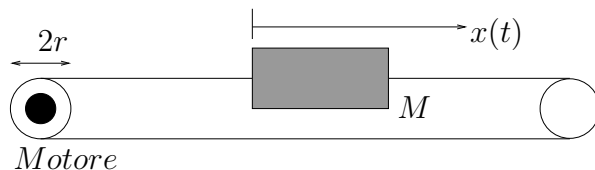


Figura 2.4: Sistema dell'esercizio 2.2

Disegnare graficamente (con grafi di flusso o funzioni di trasferimento) le relazioni seguenti

1. Relazione tra forza  $F$  e spostamento  $X(s)$  secondo lo schema di figura 2.5.
2. Relazione tra momento del motore  $T(s)$  e forza  $F(s)$  secondo lo schema della figura 2.6.
3. Relazione tra le grandezze  $\Omega(s)$  e  $U(s)$  secondo la figura 2.7.
4. Relazione tra la grandezza  $\Omega(s)$  e  $X(s)$  secondo lo schema della figura 2.8.

Rappresentare graficamente la funzione di trasferimento globale tra  $U(s)$  e  $X(s)$ , e determinare la rappresentazione nello spazio degli stati del processo. Determinare in seguito la funzione di trasferimento

$$\frac{X(s)}{U(s)}$$



Figura 2.5: Esercizio 2.2 - Domanda 1

**Soluzione:**



Figura 2.6: Esercizio 2.2 - Domanda 2

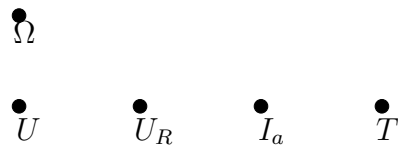


Figura 2.7: Esercizio 2.2 - Domanda 3



Figura 2.8: Esercizio 2.2 - Domanda 4

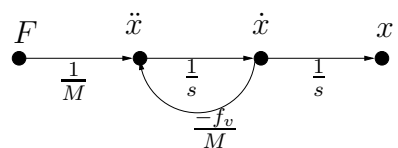


Figura 2.9: Esercizio 2.2 - Domanda 1

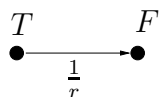


Figura 2.10: Esercizio 2.2 - Domanda 2

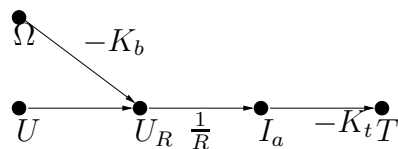


Figura 2.11: Esercizio 2.2 - Domanda 3

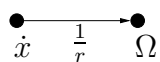


Figura 2.12: Esercizio 2.2 - Domanda 4

## 2.3 Esercizio

Un sistema con funzione di trasferimento pari a

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \alpha)}$$

ha la risposta ad un gradino unitario rappresentata nella figura 2.13.

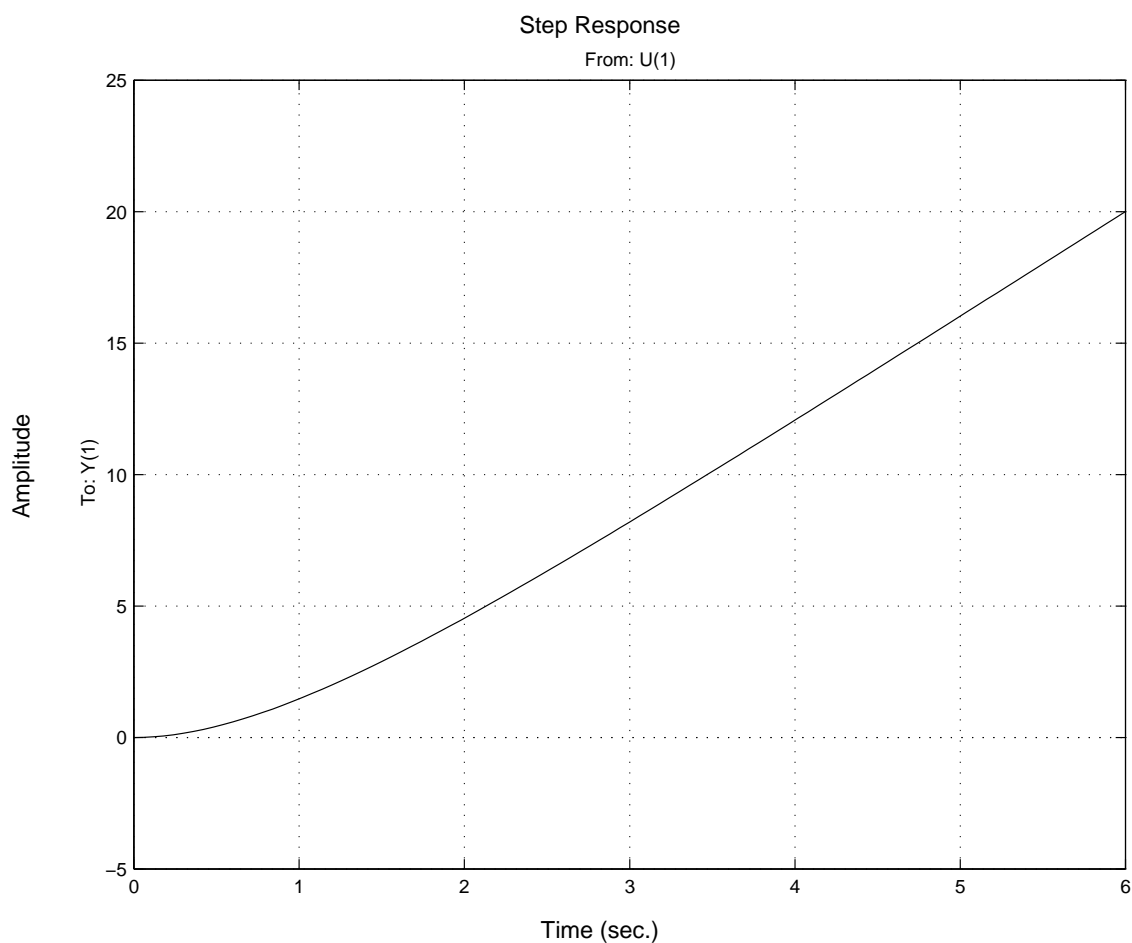


Figura 2.13: Risposta al gradino unitario del sistema dell'esercizio 2.3

Determinare

1. la risposta nel tempo del sistema in funzione dei parametri  $K$  e  $\alpha$
2. I valori di  $K$  e  $\alpha$  il più preciso possibile.

**Soluzione:** Con entrata gradino unitario, la trasformata di Laplace di  $Y(s)$  vale

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{s \cdot (s + \alpha)}$$

la cui corrispondente funzione nel tempo può essere trovata tramite l'antitrasformata

$$y(t) = -\frac{K}{\alpha^2} + \frac{K}{\alpha} \cdot t + \frac{K}{\alpha^2} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Si può notare come con il passare del tempo il termine esponenziale tende a zero e la funzione  $y(t)$  va a rappresentare la funzione di una retta. Pertanto è sufficiente cercare la retta che passa per i valori della risposta per  $t = 3s$ .

Possiamo determinare la retta vedendo che essa passa per i punti  $t = 3, y = 8$  e  $t = 6, y = 20$ , che è

$$y_{lin} = 4 \cdot t - 4$$

A questo punto si può determinare il valore di

$$\alpha = \frac{\frac{K}{\alpha}}{\frac{K}{\alpha^2}} = \frac{4}{-4} = -1$$

e

$$K = 4 \cdot (-\alpha) = 4$$

La funzione di trasferimento risulta quindi essere

$$G(s) = \frac{4}{s \cdot (s + 1)}$$

## 2.4 Esercizio

Determinare la funzione di trasferimento del circuito con l'amplificatore operazionale non invertente della figura 2.14, tenendo conto che l'amplificazione  $A(\omega)$  non è da considerare infinita come nei sistemi analizzati normalmente. Controllare in seguito che quando si considera  $A(\omega) \rightarrow \infty$  si ottiene la formula conosciuta

$$\frac{U_2}{U_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

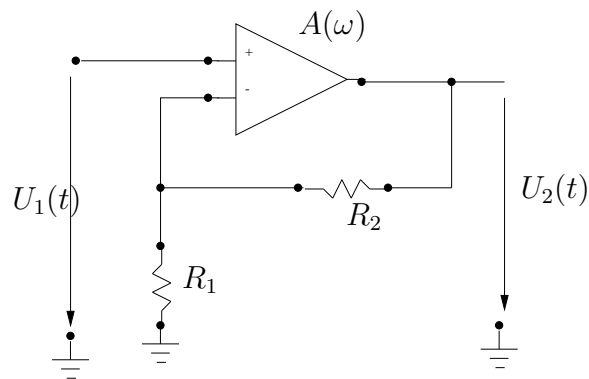


Figura 2.14: Circuito con amplificatore operazionale

**Soluzione:** Le equazioni che descrivono il sistema, partendo dall'uscita e costruendo tutte le grandezze dei nodi dipendenti risultano

$$U_2 = \Delta U \cdot A(\omega)$$

$$\Delta U = U_1 - U_{R1}$$

$$U_{R1} = U_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Il diagramma di flusso di segnali del sistema è rappresentato nella figura 2.15.

La funzione di trasferimento tra  $U_1$  e  $U_2$  si trova vedendo dal grafico considerando il percorso

$$P = A(\omega)$$



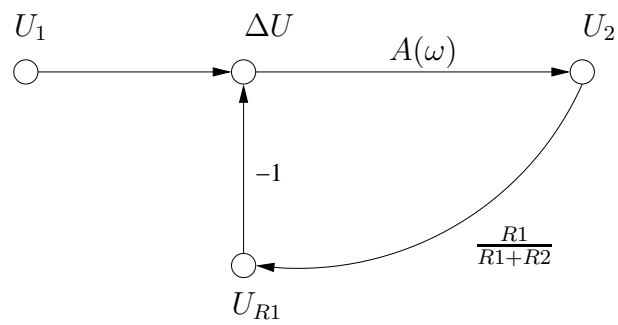


Figura 2.15: Diagramma di flusso dei segnali

e il loop

$$L_1 = -A(\omega) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La funzione di trasferimento è quindi

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{P}{1 - L_1} = \frac{A(\omega)}{1 + A(\omega) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Per  $A(\omega) \rightarrow \infty$  la funzione tende a quella semplificata.

## 2.5 Esercizio

Determinare il valore della grandezza  $Z(s)$  di un sistema formato da un argano elettrico con motore dc che solleva una massa  $M$  come da figura 2.16 ( $r = 5\text{cm}$ ,  $M = 1\text{Kg}$ ,  $R_a = 8\Omega$ ,  $L = 0$ ,  $K_b = 0.1$ ,  $K_t = 2$ ,  $J_m = 0.02$ ,  $D_m = 0.01$ ).

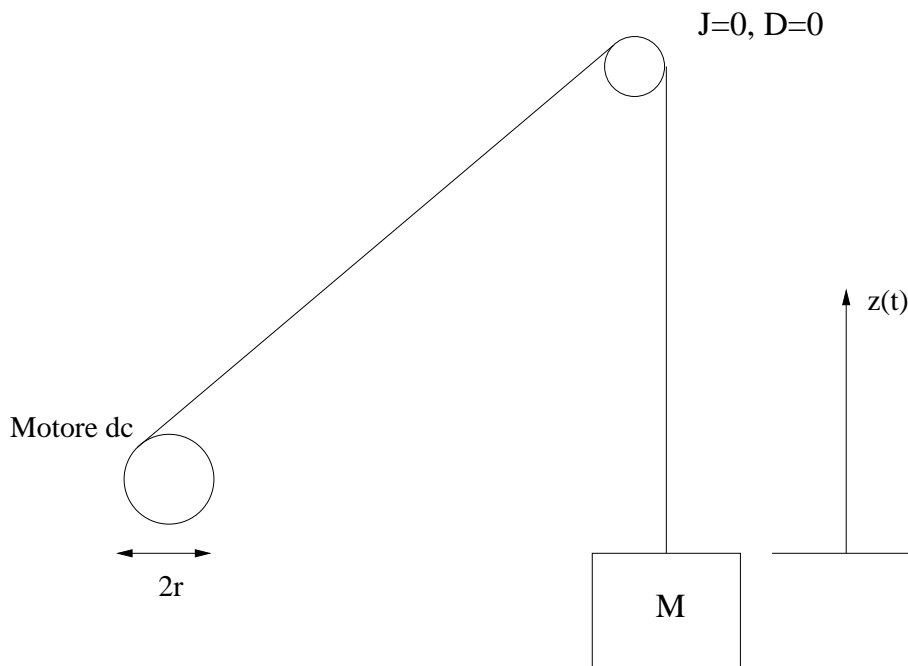


Figura 2.16: Argano elettrico dell'esercizio 2.5

Per semplificare il problema trascurate inerzia e attrito della carrucola.

**Soluzione:** Possiamo scomporre le forze del sistema come da figura 2.17.

Le equazioni meccaniche che descrivono il sistema sono

$$M\ddot{z} = F - Mg$$

$$J_m\ddot{\phi} = -D_m\dot{\phi} + T_m - r * F$$

Queste funzioni più tutte le equazioni ausiliarie portano a scrivere le uguaglianze seguenti

$$\ddot{z} = \frac{F}{M} - g$$

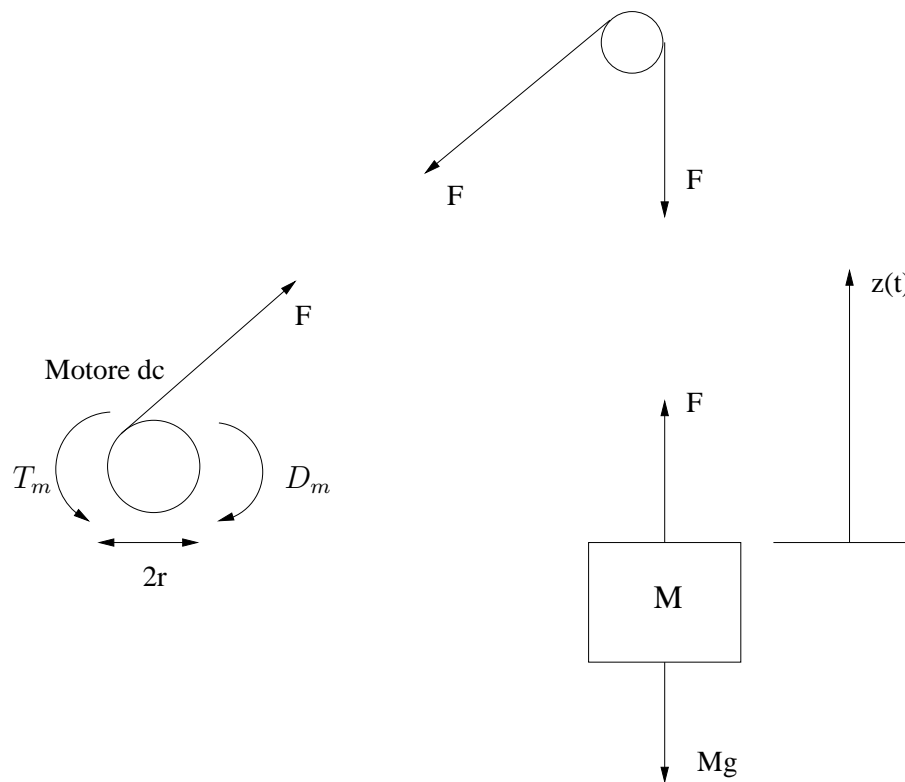


Figura 2.17: Scomposizione delle forze

$$F = \frac{T^*}{r}$$

$$r * F = T^* = T_m - D_m \dot{\varphi} - J_m \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \ddot{z}$$

$$T_m = K_t * I_a$$

$$I_a = \frac{U}{R_a} - \frac{K_b \dot{\varphi}}{R_a}$$

Possiamo ora costruire il grafo di flusso di segnali della figura 2.18. Come si può vedere ci sono due grandezze in entrata, la tensione al motore e il valore della gravità “g” (nodi indipendenti).

Dal grafo possiamo ora calcolare le due funzioni di trasferimento, quella tra l’entrata  $U(s)$  e l’uscita  $Z(s)$  e quella tra l’entrata “g” e l’uscita  $Z(s)$ .

Esiste un percorso  $P_1$  tra  $U(s)$  e  $Z(s)$  e un percorso  $P_2$  tra g e  $Z(s)$ . Ci sono inoltre tre loop che hanno nodi in comune  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$

$$P_1 = \frac{1}{R_a} K_t \frac{1}{r} \frac{1}{M} \frac{1}{s^2} = \frac{5}{s^2}$$

$$P_2 = -\frac{1}{s^2}$$

$$L_1 = -\frac{1}{r^2} \frac{1}{M} J_m = 8$$

$$L_2 = -\frac{1}{r^2} \frac{1}{M} \frac{1}{s} D_m = \frac{4}{s}$$

$$L_3 = -K_t \frac{1}{r^2} \frac{1}{M} \frac{1}{s} \frac{K_b}{R_a} = \frac{10}{s}$$

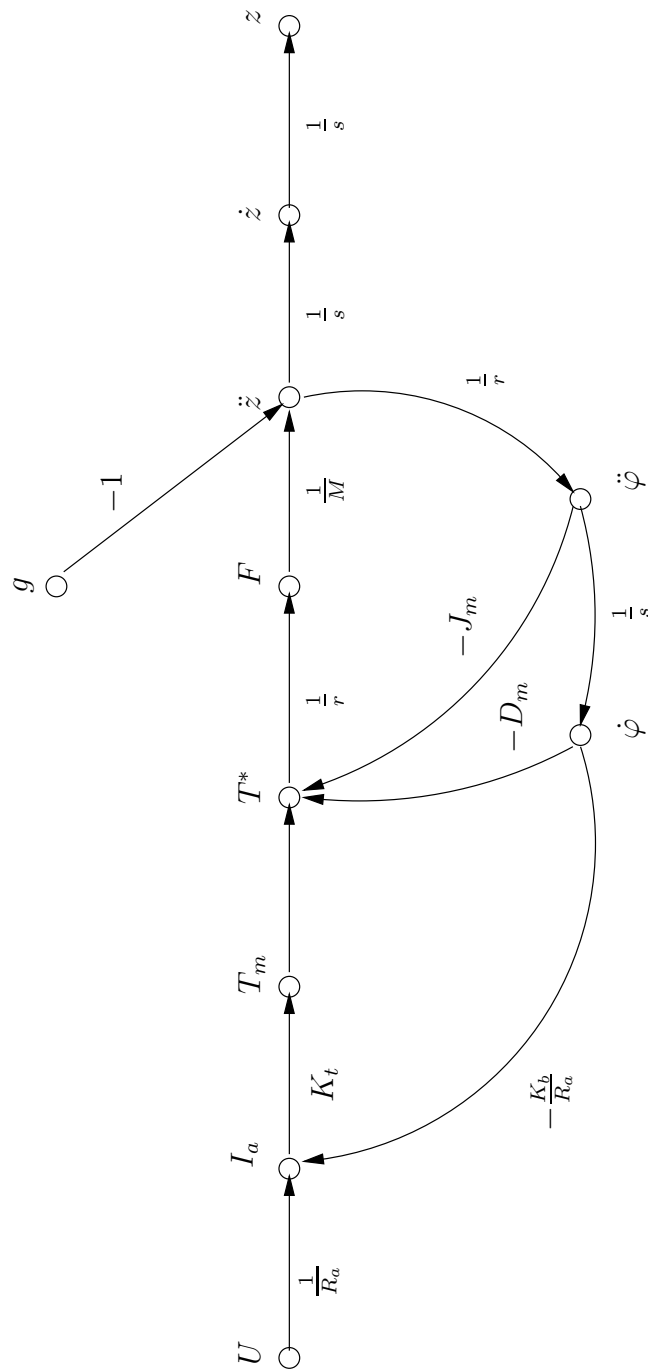


Figura 2.18: Grafo del sistema massa-argano

Siccome i 3 loop hanno nodi comuni la funzione di trasferimento il determinante vale

$$1 - L_1 - L_2 - L_3$$

Poiché  $g$  può essere visto il Laplace come costante e quindi come valore

$$\frac{9.81}{s}$$

si ottiene finalmente

$$Z(s) = \frac{P_1}{1 - L_1s - L_2(s) - L_3(s)}U(s) - \frac{P_2}{1 - L_1s - L_2(s) - L_3(s)}\frac{9.81}{s}$$

che porta al risultato

$$Z(s) = \frac{5}{9s^2 + 14s}U(s) - \frac{9.81}{9s^3 + 14s^2}$$

## 2.6 Esercizio

Viene dato il processo della figura 2.19, rappresentante un carrello mosso da un motore collegato direttamente alle ruote anteriori. Il raggio della ruota vale  $r$ , il coefficiente di attrito del sistema vale  $f_v$  (contiene anche quello del motore). L'impedenza dell'armatura  $L_a$  è nulla. Il motore è caratterizzato dalle grandezze  $R_a$ ,  $K_t$  e  $K_b$ , mentre il suo momento di inerzia è trascurabile rispetto alla massa  $M$  del carrello.

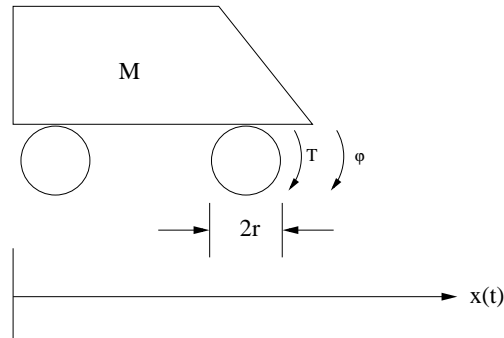


Figura 2.19: Sistema dell'esercizio 2.6

Disegnare graficamente (con grafi di flusso) le relazioni seguenti

1. Relazione tra forza  $F$  e spostamento  $X(s)$  secondo lo schema di figura 2.20.
2. Relazione tra momento del motore  $T(s)$  e forza  $F(s)$  secondo lo schema della figura 2.21.
3. Relazione tra le grandezze  $\Omega(s)$  e  $U(s)$  secondo la figura 2.22.
4. Relazione tra la grandezza  $\Omega(s)$  e  $X(s)$  secondo lo schema della figura 2.23.

Rappresentare graficamente con i grafi di flusso il sistema globale e determinare la funzione di trasferimento

$$\frac{X(s)}{U(s)}$$



Figura 2.20: Esercizio 2.6 - Domanda 1

### Soluzione:

La figura 2.28 mostra il diagramma completo del sistema.



Figura 2.21: Esercizio 2.6 - Domanda 2

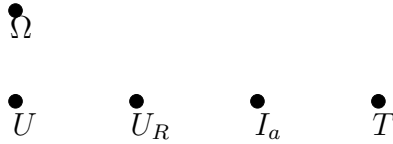


Figura 2.22: Esercizio 2.6 - Domanda 3



Figura 2.23: Esercizio 2.6 - Domanda 4

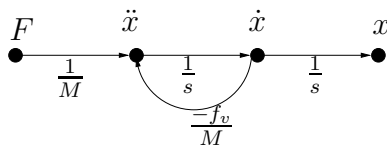


Figura 2.24: Esercizio 2.6 - Domanda 1

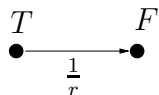


Figura 2.25: Esercizio 2.6 - Domanda 2

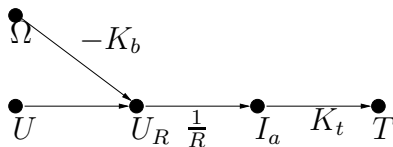


Figura 2.26: Esercizio 2.6 - Domanda 3

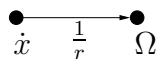


Figura 2.27: Esercizio 2.6 - Domanda 4



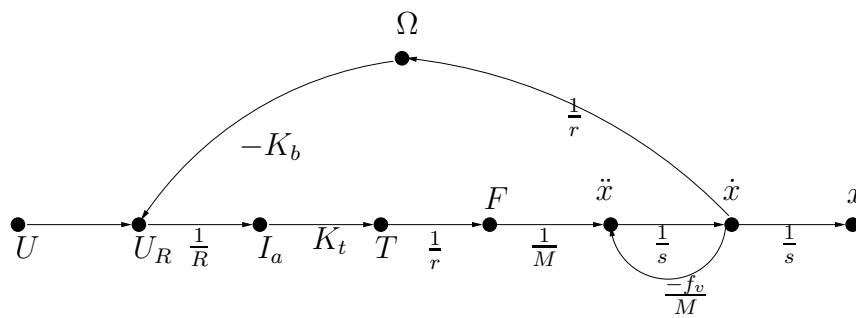


Figura 2.28: Esercizio 2.6 - Diagramma completo

Il sistema ha un percorso e due loop.

$$P = \frac{1}{R_a} K_t \frac{1}{r} \frac{1}{M} \frac{1}{s^2}$$

$$L_1 = -\frac{f_v}{M} \frac{1}{s}$$

$$L_2 = -\frac{1}{R_a} K_t \frac{1}{r} \frac{1}{M} \frac{1}{s^2} \frac{1}{r} K_b$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_t r}{s(MR_a r^2 s + R_a r^2 f_v + K_b K_t)}$$



# Capitolo 3

## Risposta di sistemi

### 3.1 Esercizio

La risposta ad un'entrata gradino unitario di un sistema incognito di 3. ordine è rappresentata nella figura 3.1. Determinare la funzione di trasferimento di 2. ordine che meglio approssima l'andamento della risposta.

**Soluzione:** Il valore finale della funzione tende a 0.5, mentre il valore massimo tende a 0.72. C'è quindi un valore di  $\%OS = 44\%$ . A questo  $\%OS$  corrisponde un valore  $\xi = 0.25$ .

La durata di due periodi è di ca.  $3.7 - 0.5 = 3.2s$ . La corrispondente frequenza di oscillazione vale quindi

$$\omega_\sigma = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 3.927$$

La corrispondente  $\omega_n$  vale

$$\omega_n = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2}} \simeq 4$$

La funzione di trasferimento risultante è quindi

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + 2s + 16}$$

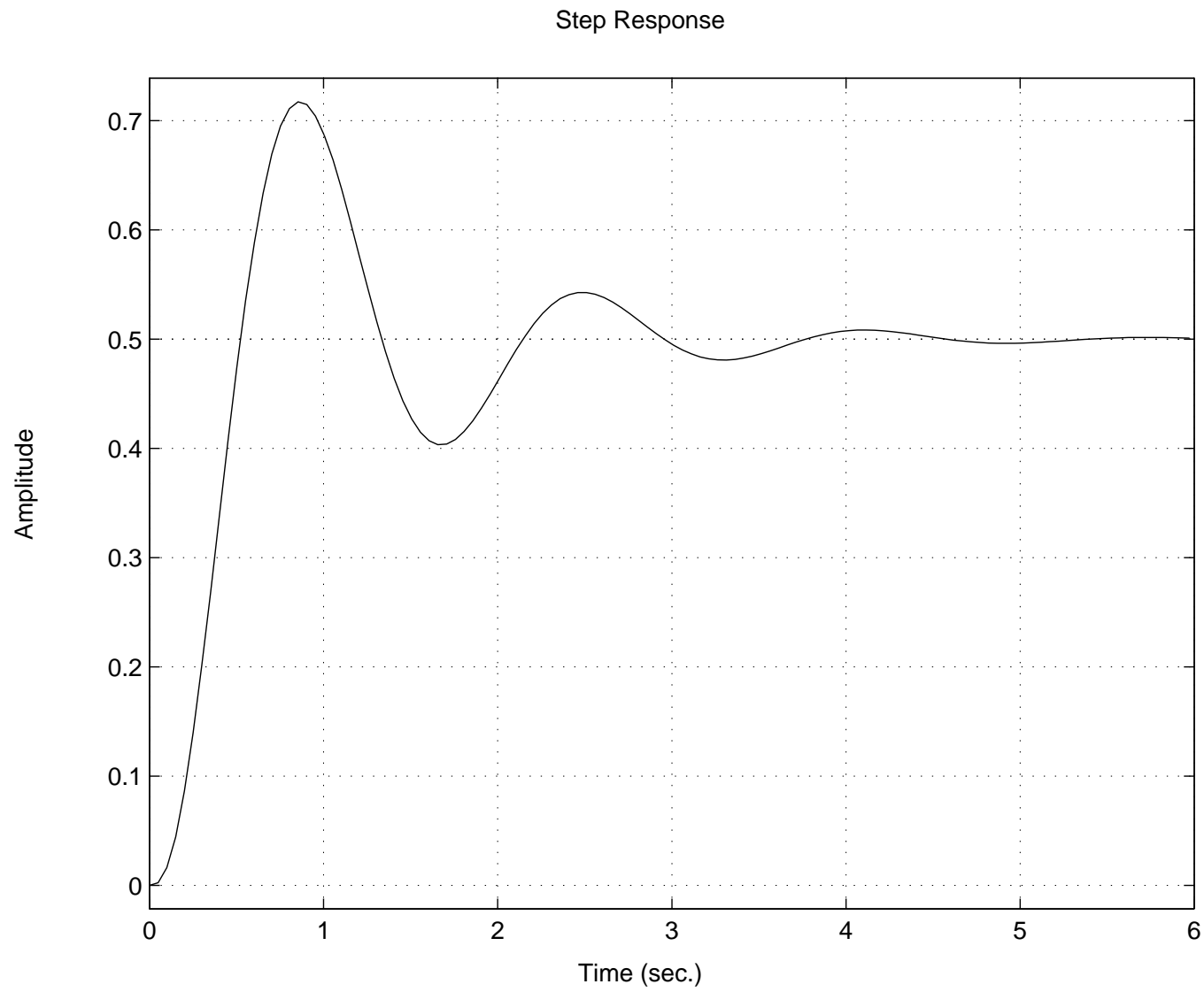


Figura 3.1: Risposta del processo dell'esercizio 3.1

### 3.2 Esercizio

Per un processo con funzione di trasferimento pari a

$$G(s) = \frac{25}{s(s+2)}$$

vengono proposti due possibili regolatori, uno puramente proporzionale, l'altro con una parte derivativa. I due circuiti risultanti sono rappresentati nelle figure 3.2 e 3.3.

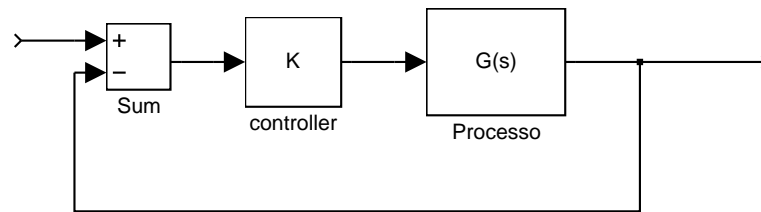


Figura 3.2: Processo dell'esercizio 3.2 con regolatore proporzionale

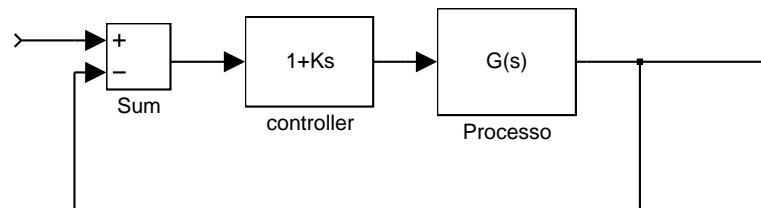


Figura 3.3: Processo dell'esercizio 3.2 con regolatore derivativo

Per entrambe le configurazioni determinare il valore di  $K$  in modo che il fattore di smorzamento del sistema ad anello chiuso valga 0.5. In seguito, con questo valore di  $K$  determinare:

1. Tempo di salita
2. Tempo di setting
3. Tempo del primo picco
4. %OS

Quali sono le differenze tra le due regolazioni?

**Soluzione:** Determiniamo per entrambe le configurazioni la funzione di trasferimento ad anello chiuso.

La funzione nella prima configurazione vale

$$G_1(s) = \frac{25K}{s^2 + 2s + 25K}$$

mentre nel secondo caso vale

$$G_2(s) = \frac{25(1 + Ks)}{s^2 + (2 + 25K)s + 25}$$

Il fattore di smorzamento vale  $\xi = 0.5$  per cui possiamo calcolare per entrambe le configurazioni il valore di  $K$ .

Nel primo caso troviamo

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 2 \cdot 0.5 \cdot \omega_n = 2 \rightarrow \omega_n = 2$$

e

$$25K = \omega_n^2 \rightarrow K = \frac{\omega_n^2}{25} = \frac{4}{25}$$

Nel secondo caso troviamo

$$\omega_n^2 = 25 \rightarrow \omega_n = 5;$$

e quindi

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 2 \cdot 0.5 \cdot 5 = 5 = 2 + 25K \rightarrow K = \frac{3}{25}$$

Nel primo caso abbiamo quindi  $\omega_{n1} = 2$  e  $\xi = 0.5$ , mentre nel secondo caso abbiamo  $\omega_{n2} = 5$  e  $\xi = 0.5$ .

Applicando le varie formule troviamo che

$$T_{r1} = \frac{1 - 0.4167\xi + 2.917\xi^2}{\omega_{n1}} = 0.76s$$

$$T_{r2} = \frac{1 - 0.4167\xi + 2.917\xi^2}{\omega_{n2}} = 0.30s$$

$$T_{s1} = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_{n1}} = 4.056s$$

$$T_{s2} = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_{n2}} = 1.62s$$

$$T_{p1} = \frac{\pi}{\omega_{n1}\sqrt{1-\xi^2}} = 1.814s$$

$$T_{p2} = \frac{\pi}{\omega_{n2}\sqrt{1-\xi^2}} = 0.725s$$

$$\%OS_1 = \%OS_2 = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 16.3\%$$

Attenzione: essendoci uno zero supplementare in  $G_2(s)$  i valori calcolati sono approssimazioni dei valori reali.

### 3.3 Esercizio

Il processo rappresentato nella figura 3.4 è composto da un loop interno con feedback  $K_t$  e uno esterno con guadagno  $K_b$  e feedback unitario.

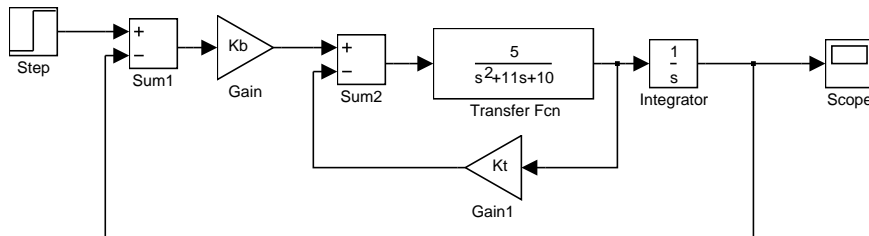


Figura 3.4: Processo dell'esercizio 3.3

Determinare il valore di  $K_t$  che rende il loop interno criticamente smorzato. In seguito, con questo valore di  $K_t$ , determinare il valore di  $K_b$  in modo che il sistema complessivo oscilli e determinarne la frequenza di oscillazione.

**Soluzione:** La funzione di trasferimento del loop interno vale

$$G_1(s) = \frac{5}{s^2 + 11s + 10 + 5K_t}$$

Per avere un sistema criticamente smorzato occorre avere il valore di  $\xi = 1$ . Conseguentemente

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_{n1} \cdot s = 11 \rightarrow \omega_{n1} = 5.5$$

Il valore di  $K_t$  può essere ora calcolato da

$$10 + 5K_t = \omega_{n1}^2 \rightarrow K_t = \frac{\omega_{n1}^2 - 10}{5} = 4.05$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo vale

$$G(s) = \frac{5 \cdot K_b}{s^3 + 11s^2 + 30.25s + 5 \cdot K_b}$$

Il denominatore deve avere due poli immaginari e un polo reale, per cui deve valere



$$(s^2 + \omega_n^2)(s + p) = s^3 + p \cdot s^2 + \omega_n^2 \cdot s + p \cdot \omega_n^2$$

Un paragone di coefficienti ci fornisce

$$p = 11$$

$$\omega_n = 5.5$$

$$\omega_n^2 \cdot p = 5 \cdot K_b \rightarrow K_b = 66.55$$

### 3.4 Esercizio

Il diagramma a blocchi di un processo lineare è rappresentato nella figura 3.5

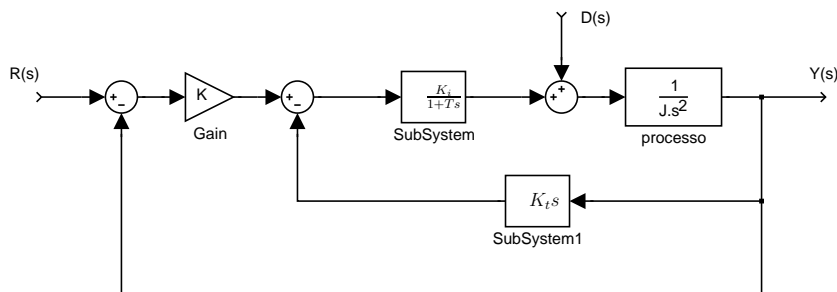


Figura 3.5: Processo dell'esercizio 3.4

I parametri fissi del processo sono  $T = 0.1$ ,  $J = 0.01$  e  $K_i = 10$ .

Attenzione: per risolvere questo esercizio occorre anche determinare la funzione di trasferimento tra  $D(s)$  e  $Y(s)$ !

Determinare

1. Dato  $r(t) = t$  e  $D(s) = 0$  determinare  $e_\infty$  in funzione dei parametri  $K$  e  $K_t$ . Determinare le restrizioni per  $K$  e  $K_t$  in modo che il sistema resti stabile.
2. Determinare il valore allo stato finito di  $y(t)$  con  $r(t)=0$  e un segnale di disturbo  $D(s)$ .
3. Per  $K_t = 0.01$  e  $r(t) = 0$  determinare il valore di  $K$  che minimizza  $y(\infty)$  quando  $D(s)$  rappresenta un'entrata di tipo gradino unitario.
4. Quale influsso ha questo valore di  $K$  sulla risposta dinamica del sistema?
5. Utilizzando il valore di  $K$  precedentemente trovato, determinare un nuovo valore per  $K_t$  in modo che l'equazione caratteristica del sistema abbia due poli complessi con parte reale pari a  $-2.5$ . Determinare le altre 3 radici dell'equazione caratteristica.

#### Soluzione:

Possiamo trattare direttamente lo schema come un diagramma di flusso di segnale e determinare in questo modo i percorsi tra  $(R(s)$  e  $Y(s)$ , come pure il percorso tra  $D(s)$  e  $Y(s)$ .

$$P_1 = R(s) \rightarrow Y(s) = K \frac{K_i}{1 + T s} \frac{1}{J s^2}$$

$$P_2 = D(s) \rightarrow Y(s) = \frac{1}{Js^2}$$

Nel sistema abbiamo 2 loop

$$L_1 = -K_t s \frac{K_i}{1 + Ts} \frac{1}{Js^2}$$

e

$$L_2 = -K \frac{K_i}{1 + Ts} \frac{1}{Js^2}$$

Possiamo quindi determinare il valore di  $Y(s)$  in funzione delle due entrate

$$Y(s) = \frac{KK_i}{Js^3T + Js^2 + K_iK_t s + KK_i} R(s) + \frac{1 + sT}{Js^3T + Js^2 + K_iK_t s + KK_i} D(s)$$

Con i valori dati le due funzioni di trasferimento diventano

$$G_R = \frac{10000 \cdot K}{s^3 + 10 \cdot s^2 + 10000 \cdot K_t \cdot s + 10000 \cdot K}$$

e

$$G_D = \frac{100 \cdot (s + 10)}{s^3 + 10 \cdot s^2 + 10000 \cdot K_t \cdot s + 10000 \cdot K}$$

### 3.5 Esercizio

La risposta ad un **impulso di Dirac** di un sistema di **3. ordine**, con un polo a 0 e con condizioni iniziali nulle, è rappresentata nella figura 3.6. Determinare nel modo più preciso possibile la funzione di trasferimento di questo sistema. (*Attenzione: l'impulso di Dirac è la derivata nel tempo della funzione gradino unitario*).

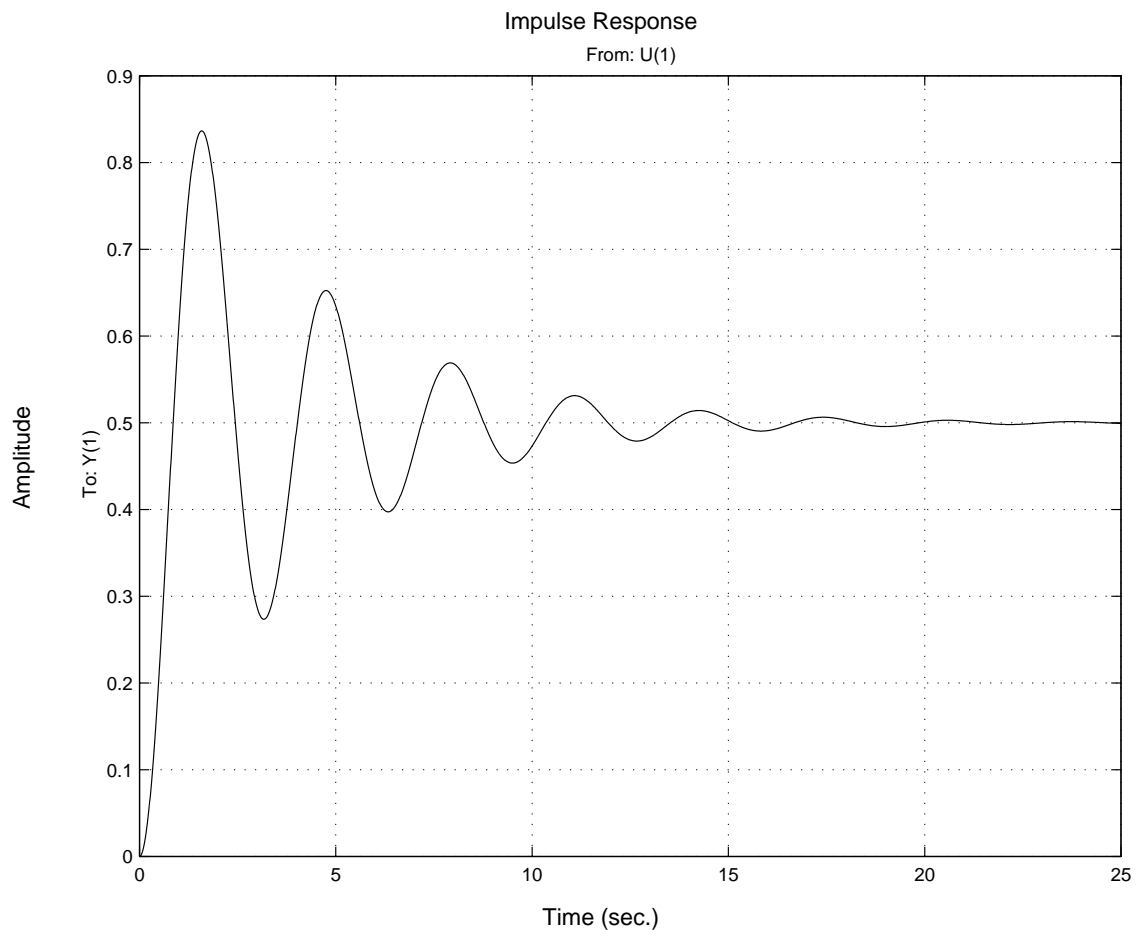


Figura 3.6: Risposta all'impulso del sistema dell'esercizio 3.5

**Soluzione:** Analizziamo la risposta come quella di un sistema di 2. ordine con entrata gradino, e alla fine aggiungeremo un integratore per avere quella di 3. ordine.

Il valore massimo vale ca. 0.84 che equivale ad un  $\%OS = 68\%$  rispetto al valore finale  $y = 0.5$  verso cui tende la risposta del sistema. A questo  $\%OS$  corrisponde un valore di  $\xi = 0.125$ .

Vediamo che 6 periodi occupano un tempo pari a ca. 19s.

Quindi:

$$T = \frac{19}{6}$$

$$\omega_\sigma = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 1.984$$

$$\omega_n = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 2$$

La funzione di trasferimento di 3. ordine che meglio approssima questa risposta vale quindi

$$G(s) = \frac{2}{s \cdot (s^2 + 0.5s + 4)}$$

### 3.6 Esercizio

Nella tabella 3.1 sono rappresentate 3 coppie di funzioni di trasferimento. Associare ogni coppia di funzioni a uno dei 3 grafici della tabella 3.2 che rappresentano la risposta ad un gradino unitario delle due funzioni  $G_{1x}(s)$ ,  $G_{2x}(s)$  (Attenzione: evitate calcoli inutili!).

a)	$G_{1a}(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$	$G_{2a}(s) = \frac{90}{s^2 + 6s + 90}$
b)	$G_{1b}(s) = \frac{13}{s^2 + 4s + 13}$	$G_{2b}(s) = \frac{40}{s^2 + 4s + 40}$
c)	$G_{1c}(s) = \frac{17}{s^2 + 2s + 17}$	$G_{2c}(s) = \frac{20}{s^2 + 4s + 20}$

Tabella 3.1: Coppie di funzioni di trasferimento per l'esercizio 3.6

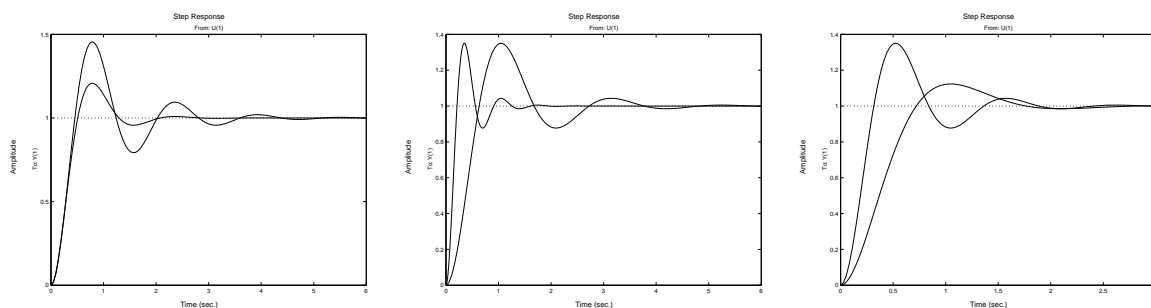


Tabella 3.2: Rappresentazioni per l'esercizio 3.6

**Soluzione:** Andiamo a vedere la posizione dei poli di ciascuna coppia di funzioni.

$$G_{1a} \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm 3i$$

$$G_{2a} \rightarrow s_{1,2} = -3 \pm 9i$$

I poli sono sulla stessa diagonale, per cui i due sistemi hanno lo stesso fattore di smorzamento  $\xi$  e pertanto lo stesso %OS. La rappresentazione di queste due funzioni è quindi quella del grafico **2**.

$$G_{1b} \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 3i$$

$$G_{2b} \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 6i$$

I poli dei due sistemi hanno la parte reale uguale. I sistemi hanno quindi lo stesso valore di  $\xi \cdot \omega_n$ , e pertanto anche lo stesso  $T_{setting}$ . La rappresentazione di queste due funzioni è quindi quella del grafico **3**.

$$G_{1c} \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm 4i$$

$$G_{2c} \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 4i$$

I poli dei due sistemi hanno la parte immaginaria uguale. I sistemi hanno quindi lo stesso valore di  $\omega_\sigma$ , e pertanto anche lo stesso tempo del primo picco  $T_p$ . La rappresentazione di queste due funzioni è quindi quella del grafico **1**.

### 3.7 Esercizio

Per il sistema rappresentato nella figura 3.7 determinare i valori di  $K$  e  $P$  in modo che il %OS sia pari a 40% e il tempo del 1. picco equivalga a 1 s. Con i valori trovati determinare in seguito il tempo di setting e l'errore con entrata gradino unitario.

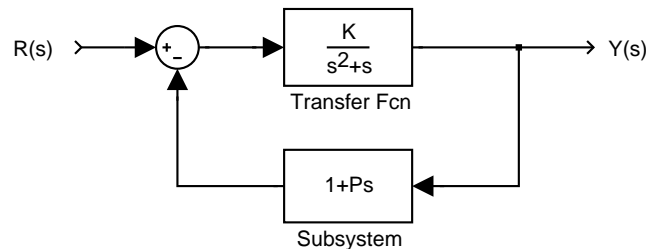


Figura 3.7: Sistema dell'esercizio 3.7

**Soluzione:** La funzione di trasferimento globale del sistema vale

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s^2+s}}{1 + \frac{K \cdot (1+P \cdot s)}{s^2+s}} = \frac{K}{s^2 + (K \cdot P + 1) \cdot s + K}$$

Al %OS dato equivale un valore di  $\xi = 0.28$ . Dal tempo del 1. picco si ricava quindi il valore di  $\omega_n$ .

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \xi^2}} = 3.2725$$

Ne consegue che

$$K = \omega_n^2 = 10.709$$

e

$$P = \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega_n - 1}{K} = 0.0777$$

Applicando le formule troviamo

$$T_s = 4.314s$$



La funzione tende al valore

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{15}{15} = 1$$

### 3.8 Esercizio

Determinare la funzione di trasferimento del sistema di 2. ordine che ha la risposta nel tempo rappresentata nella figura 3.8 ad un'entrata di tipo gradino unitario.

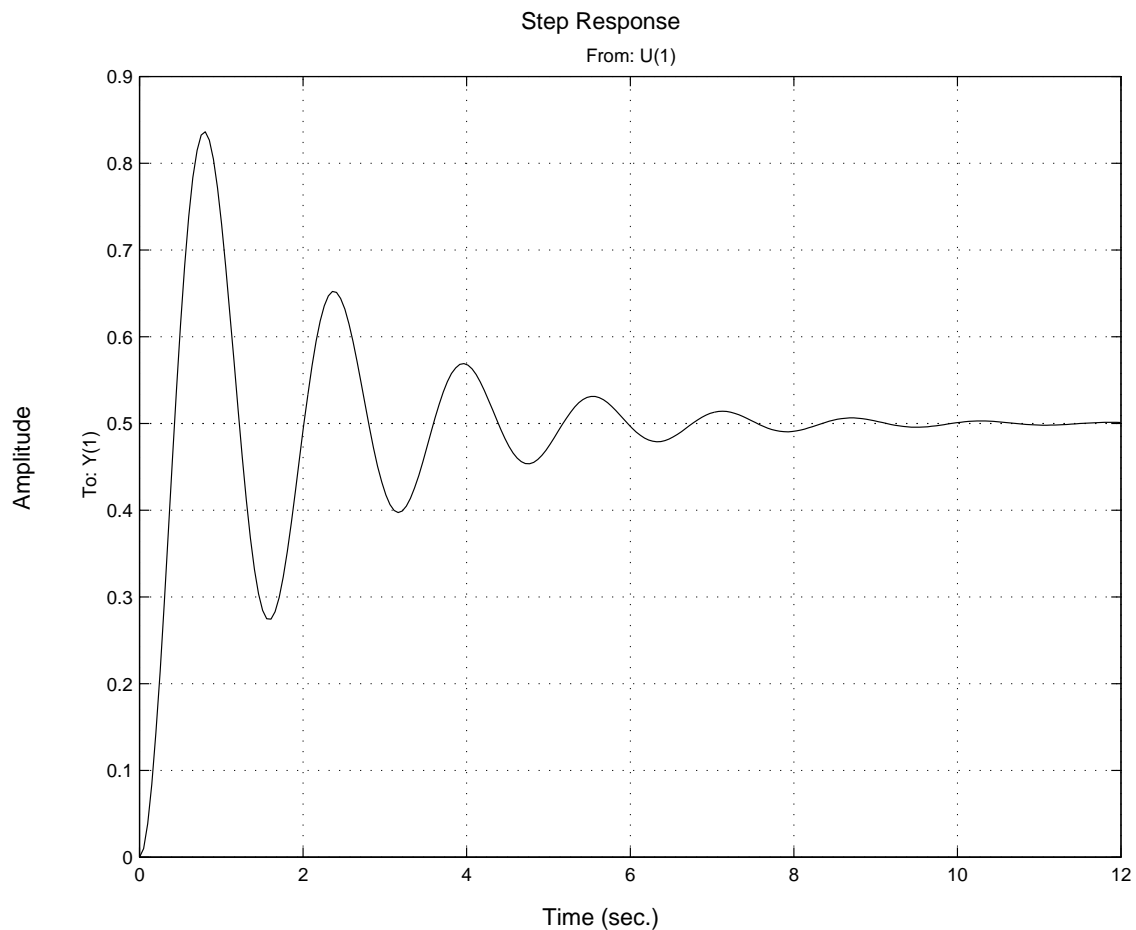


Figura 3.8: Risposta del sistema dell'esercizio 3.8

**Soluzione:** Il valore finale verso cui tende la funzione è 0.5. Con un calcolo di proporzioni calcolo il valore del massimo dalle misure in cm sul grafico.

$$\frac{8.1\text{cm}}{x} = \frac{8.722\text{cm}}{0.9}$$

da cui si ricava  $x = 0.836$ . Il %OS vale quindi

$$\left(\frac{0.836}{0.5} - 1\right) * 100 = 67.16\%$$

Possiamo ora dalle formule determinare il valore di  $\xi$  che vale

$$\xi = 0.125$$

Analogamente calcoliamo il tempo occorrente per 5 periodi di oscillazione sul grafico

$$\frac{10.96cm}{12s} = \frac{7.2cm}{x}$$

da cui si ricava  $x = 7.88s$ .

Questo valore è relativo a 5 periodi, e possiamo quindi determinare la  $\omega$  di oscillazione da

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 5 \frac{2\pi}{x} = 3.985$$

Possiamo ora determinare la frequenza naturale da

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 4$$

La funzione di trasferimento risulta quindi essere

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + s + 16}$$

### 3.9 Esercizio

Determinare il valore di  $K$  per lo schema della figura 3.9, in modo che il sistema ad anello chiuso abbia due poli reali, di cui uno a  $-8$ .

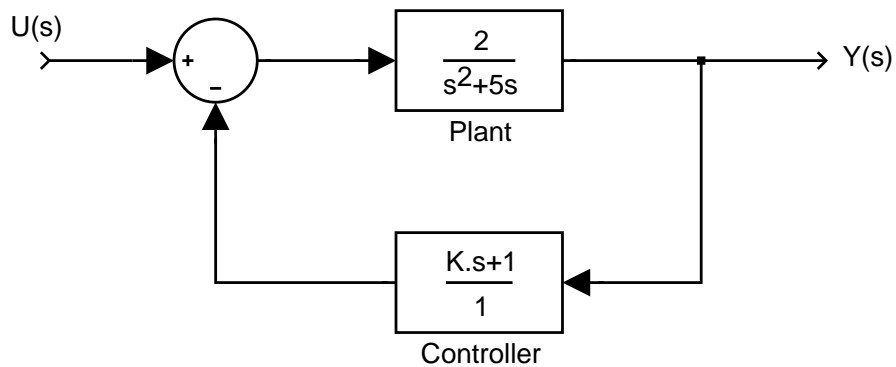


Figura 3.9: Schema per l'esercizio 3.9

**Soluzione:** La funzione di trasferimento totale vale

$$G_{TOT} = \frac{\frac{2}{s^2+5s}}{1 + \frac{2}{s^2+5s}(Ks+1)} = \frac{2}{s^2 + (5+2K)s + 2}$$

Se un polo si trova a  $-8$ , per avere il denominatore trovato il secondo polo deve trovarsi a

$$\frac{2}{8} = 0.25$$

Ne consegue che il termine che moltiplica  $s$  al denominatore vale

$$5 + 2K = 8 + 0.25 = 8.25$$

da cui si ricava infine

$$K = 1.625$$

### 3.10 Esercizio

Determina i poli della funzione di trasferimento di 2. ordine che rispetta le specifiche della tabella 3.3.

$\%OS = 10\%$	$T_s = 0.5s$
$\%OS = 15\%$	$T_p = 0.25s$
$T_s = 5s$	$T_p = 2s$

Tabella 3.3: Specifiche dell'esercizio 3.10

#### Soluzione:

Caso 1: usando la formula 3.47 otteniamo  $\xi = 0.59$ , e con la formula 3.37 si arriva al valore di  $\omega_n = 13.96$ .

Caso 2: usando le formule 3.47 e 3.49 si ottengono i valori  $\xi = 0.517$  e  $\omega_n = 14.68$ .

Caso 3: Si tratta di risolvere un sistema di due equazioni

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 2$$

e

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1 - \xi^2})}{\xi\omega_n} = 5$$

Sostituendo

$$\omega_n = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \xi^2}}$$

nella seconda equazione si ottiene

$$5 \frac{\xi\pi}{2\sqrt{1 - \xi^2}} + \ln(0.02\sqrt{1 - \xi^2}) = 0$$

che può essere risolta tramite la calcolatrice con il comando “zeros”.

La soluzione fornita dà un valore di  $\xi = 0.4564$  che messo poi nella prima equazione ci dà il valore di  $\omega_n = 1.7654$ .

Nei tre casi è poi possibile determinare i poli da

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

### 3.11 Esercizio

Determina, per un'entrata gradino, il valore della resistenza che permette di avere un  $\%OS = 20\%$  sul condensatore, nel circuito della figura 3.10.

I valori conosciuti sono  $L = 1H$  e  $C = 10^{-6}F$ .

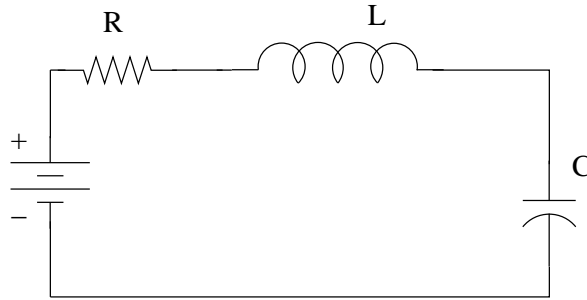


Figura 3.10: Circuito dell'esercizio 3.11

#### Soluzione:

La funzione di trasferimento tra la tensione in entrata e quella sul condensatore vale

$$G(s) = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \frac{1}{sC} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

Dividendo numeratore e denominatore per  $LC$  si ottiene

$$G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Sostituendo i valori conosciuti si ottiene

$$G(s) = \frac{10^6}{s^2 + sR + 10^6}$$

Con un paragone di coefficienti con la funzione standard

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

si ottiene  $\omega_n = 10^3$  e  $\xi = 0.456$ .

Quindi

$$R = 2\xi\omega_n = 912\Omega$$



### 3.12 Esercizio

Il sistema della figura 3.11 è formato da un loop interno con feedback  $K_t$  e da un secondo loop esterno con guadagno  $K_b$ .

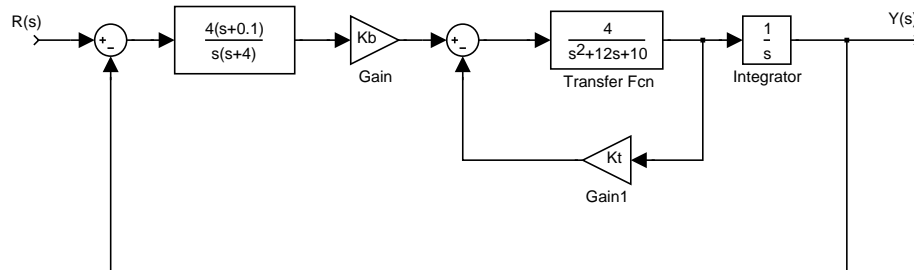


Figura 3.11: Sistema dell'esercizio 3.12

Determinare il valore di  $K_t$  che porta il loop interno ad essere smorzato criticamente. In seguito, con il valore trovato, determinare:

1. I valori di  $K_b$  che mantengono il sistema asintoticamente stabile
2. Il valore di  $K_b$  per cui il sistema oscilla e la frequenza naturale del sistema con questo guadagno.

#### Soluzione:

Loop interno

$$G_{TOT1} = \frac{\frac{4}{s^2+12s+10}}{1 + \frac{4K_t}{s^2+12s+10}} = \frac{4}{s^2 + 12s + 10 + 4K_t}$$

Se il sistema è smorzato criticamente significa che  $\xi = 1$ . Ne consegue, guardando il denominatore, che

$$2\xi\omega_n = 12 \rightarrow \omega_n = 6$$

Da

$$\omega_n^2 = 36 = 10 + 4K_t \rightarrow K_t = 6.5$$

$$G_{TOT1} = \frac{4}{s^2 + 12s + 36}$$

Il sistema completo ad anello aperto vale

$$G_{open} = K_b \frac{4(s+0.1)}{s(s+4)} \frac{4}{s^2+12s+36} \frac{1}{s}$$

mentre la funzione di trasferimento ad anello chiuso è quindi

$$G_{TOT} = \frac{16K_b(s+0.1)}{s^2(s+4)(s+6)^2 + 16K_b(s+0.1)}$$

Sviluppando il denominatore si vede che questo vale

$$s^5 + 16s^4 + 84s^3 + 144s^2 + 16K_b s + 1.K_b$$

Per la stabilità questo polinomio deve avere poli solo nel semipiano sinistro.

Sviluppiamo quindi la tabella di Routh del sistema (tabella 3.4).

$s^5$	1	84	$16K_b$	0
$s^4$	16	144	$1.6K_b$	0
$s^3$	75	$15.9K_b$	0	
$s^2$	$-3.392(K_b - 42.4528)$	$1.6K_b$		
$s$	$15.9K_b \frac{(K_b - 40.2278)}{K_b - 42.4528}$	0		
1	$1.6K_b$			

Tabella 3.4: Tabella di Routh del sistema dell'esercizio 3.12

Analizzando la prima colonna della tabella di Routh, non devono esserci cambiamenti di segno. Dall'ultima riga vediamo subito che  $K_b > 0$ . Dalla riga di  $s^2$  si vede che  $K_b < 42.4528$ . L'analisi della riga  $s$  è un poco più complessa, poiché la frazione può avere numeratore e denominatore di stesso segno, positivo o negativo.

Se entrambi fossero positivi avremmo le due condizioni  $K_b > 42.4528$  e  $K_b > 40.2278$  che darebbero come condizione globale  $K_b > 42.4528$ , incompatibile con quanto

trovato prima. Quindi devono per forza essere entrambi negativi, e conseguentemente si ha  $K_b < 42.4528$  e  $K_b < 40.2278$  che dà globalmente una condizione  $K_b < 40.2278$ .

Quindi le condizioni di stabilità sono date da

$$0 < K_b < 40.2278$$

Affinché il sistema oscilli il denominatore di 5. ordine deve essere una moltiplicazione di due polinomi del tipo

$$(s^2 + \omega_n^2)(s^3 + as^2 + bs + c)$$

Espandendo la moltiplicazione si ottiene

$$s^5 + as^4 + (\omega_n^2 + b)s^3 + (a\omega_n^2 + c)s^2 + b\omega_n^2s + c\omega_n^2$$

Paragonando questo polinomio con il denominatore della nostra funzione di trasferimento  $G_{TOT}$  otteniamo il sistema

$$a = 16 \quad (3.1)$$

$$\omega_n^2 + b = 84 \quad (3.2)$$

$$a\omega_n^2 + c = 16\omega_n^2 + c = 144 \quad (3.3)$$

$$b\omega_n^2 = 16K_b \quad (3.4)$$

$$c\omega_n^2 = 1.6K_b \quad (3.5)$$

Dalle equazioni (4) e (5) vediamo che  $b = 10c$ . Sostituendo questo valore nella 2. equazione e utilizzando la 2. e 3. equazione abbiamo un sistema di 2. ordine che ci fornisce

$$c = \frac{1344 - 144}{159} = 7.547$$

e

$$\omega_n^2 = 84 - 10c \rightarrow \omega_n = 2.92$$

Ora troviamo facilmente il valore di

$$b = 10 * c = 75.47$$

e

$$K_b = \frac{b\omega_n^2}{16} = 40.2278$$

### 3.13 Esercizio

Per il sistema della figura 3.12 la funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{25}{s(s+4)}$$

Determinare

1. Tempo di salita  $T_r$
2. Tempo del 1. picco
3. Valore del massimo “overshoot”
4. Tempo di setting  $T_s$

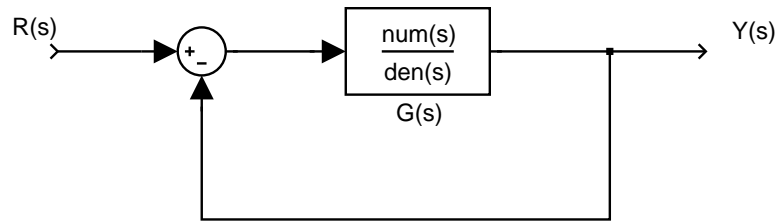


Figura 3.12: Sistema dell'esercizio 3.13

**Soluzione:**

$$G_{TOT} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

Analizzando il denominatore otteniamo  $\omega_n = 5$  e

$$2\xi\omega_n = 4 \rightarrow \xi = \frac{4}{2\omega_n} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Utilizzando ora questi valori otteniamo le grandezze cercate

$$T_r = \frac{1 - 0.4167\xi + 2.917\xi^2}{\omega_n} = 0.26s$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} = 0.685s$$

$$\%OS = 25.38\% \rightarrow y_{max} = 1.2538$$

$$T_s = 2$$

### 3.14 Esercizio

Il sistema della figura 3.13 ha la risposta mostrata nella figura 3.14.

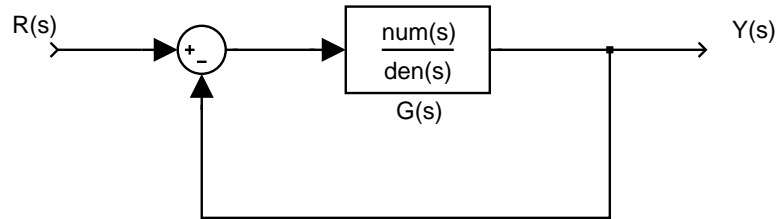


Figura 3.13: Sistema dell'esercizio 3.14

Determinare la funzione di trasferimento  $G(s)$ .

**Soluzione:**

Dal grafico misuro in cm il  $\%OS$  che vale  $5.6cm$  Il valore in cm di "1" vale  $7.65cm$

$$\%OS = 100 \frac{5.6}{7.65} = 73.2\% \rightarrow \xi \simeq 0.1$$

Il valore di 7 periodi può essere letto dal grafico ed equivale a  $13.65cm$  mentre i 7 secondi di simulazione equivalgono a  $17.3cm$ . Anche in questo caso un calcolo di proporzioni ci fornisce

$$T_{7periodi} = 7s \frac{13.65cm}{17.3cm} = 5.523s$$

Calcoliamo ora

$$\omega_d = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \frac{7}{T_{7periodi}} = 7.963rad$$

Possiamo ora risalire a

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} \simeq 8$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale quindi

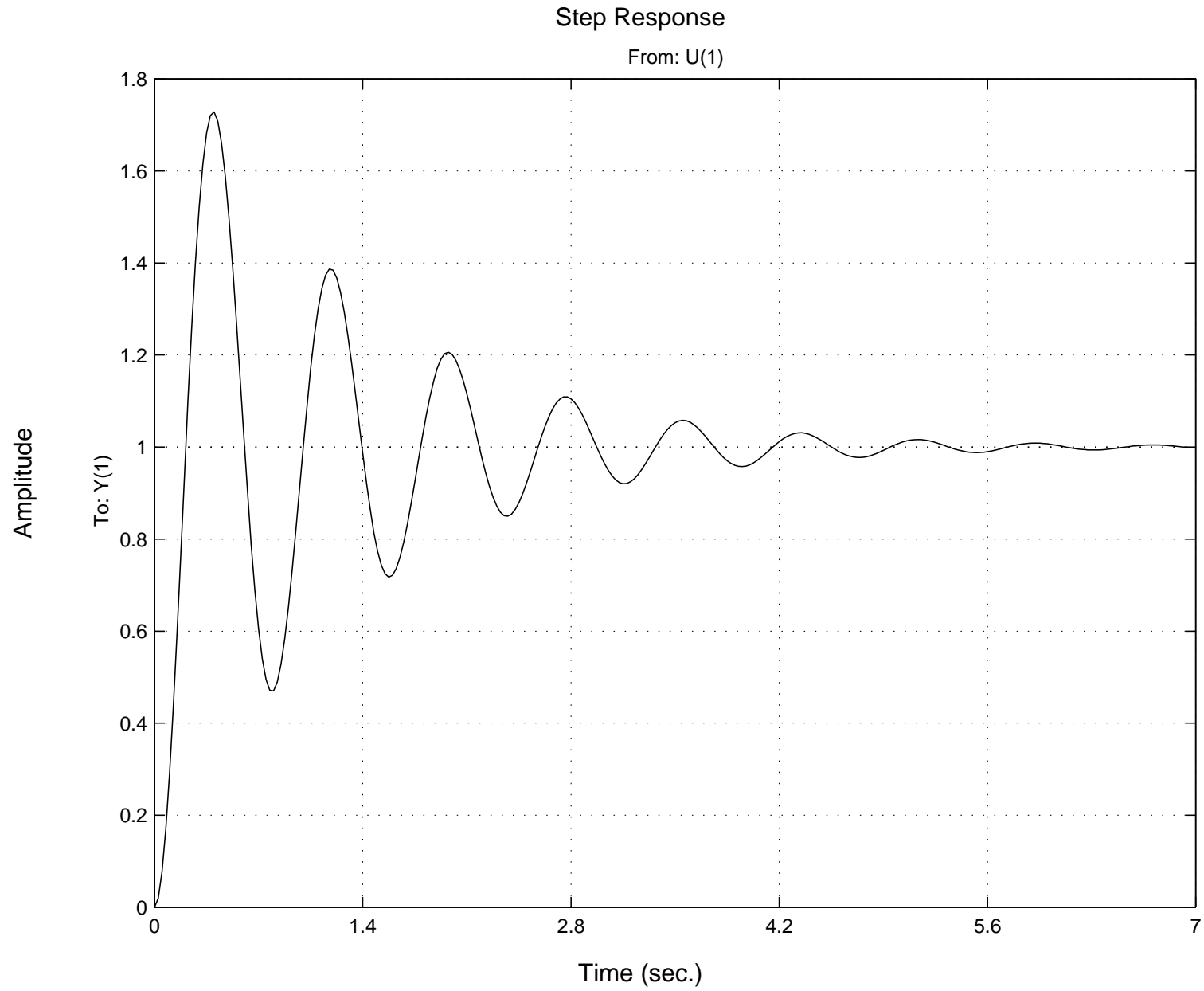


Figura 3.14: Risposta del sistema dell'esercizio 3.14



$$G_{TOT} = \frac{64}{s^2 + 1.6s + 64}$$

Partendo dal presupposto che la funzione ad anello aperto valga genericamente

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + bs + c}$$

Facciamo un paragone di coefficienti tra le due  $G_{TOT}$

$$\frac{a}{s^2 + bs + a + c} = \frac{64}{s^2 + 1.6s + 64}$$

da cui si ottiene  $a = 64$ ,  $b = 1.6$  e  $c = 0$

La funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s)$  vale quindi

$$G(s) = \frac{64}{s(s + 1.6)}$$

### 3.15 Esercizio

Un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + \alpha}$$

ha la risposta ad anello aperto della figura 3.15 e la risposta ad anello chiuso con feedback unitario della figura 3.16.

Determinare le equazioni che permettono di determinare i valori di  $K$  e  $\alpha$ . E' possibile risolvere le equazioni? Cosa si puo' dire dei valori  $K$  e  $\alpha$ ?

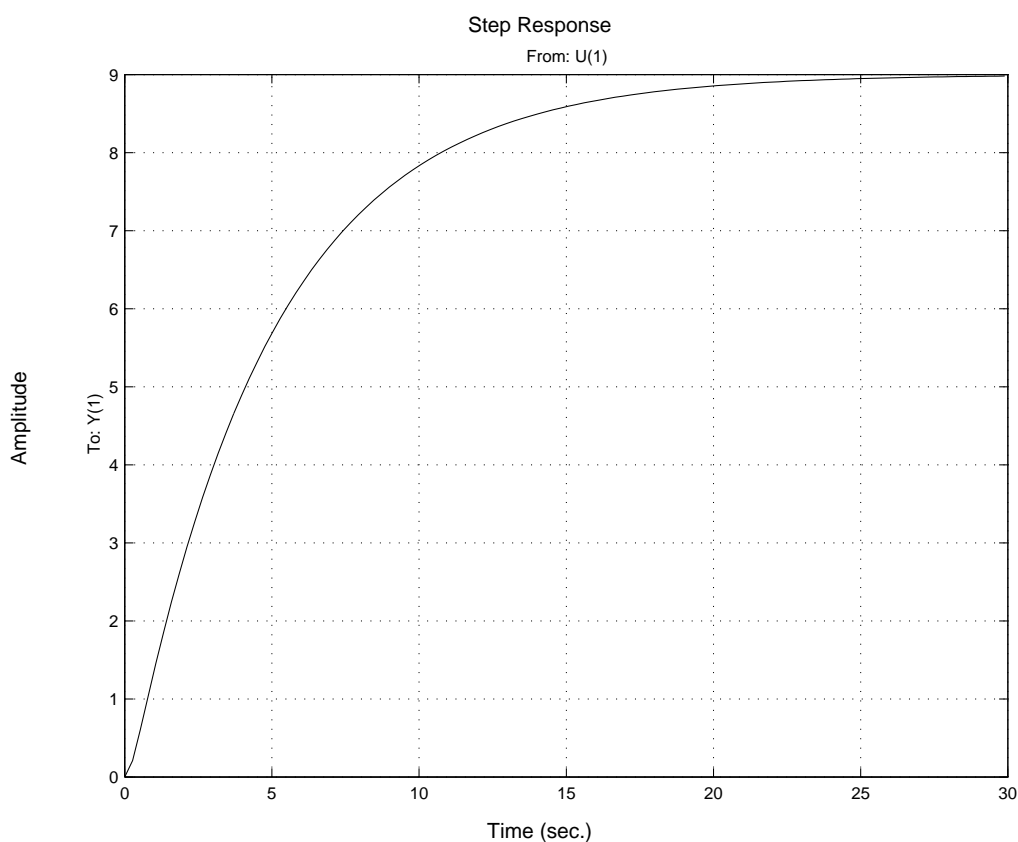


Figura 3.15: Risposta ad anello aperto del sistema dell'esercizio 3.15

#### Soluzione:

Il valore di  $Y(s)$  con la funzione ad anello aperto vale

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{K}{s^2 + 5s + \alpha}$$

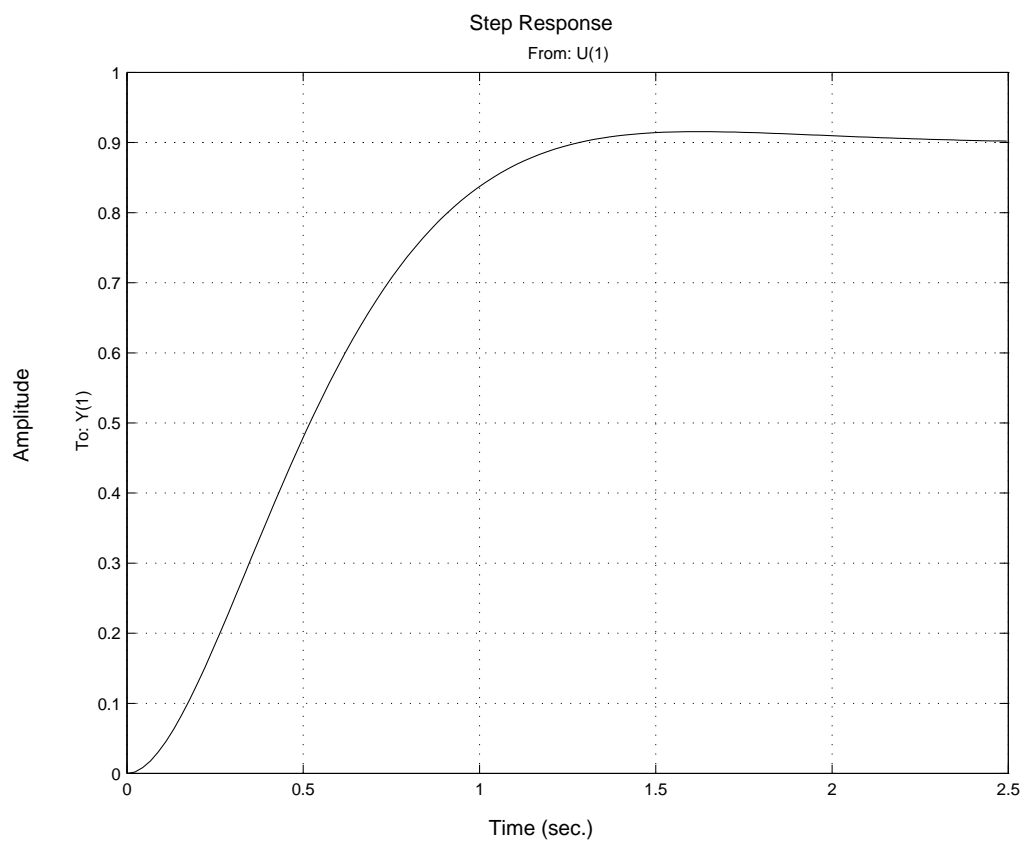


Figura 3.16: Risposta ad anello chiuso del sistema dell'esercizio 3.15

Possiamo vedere che la funzione tende al valore 9

Pertanto

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = s \frac{1}{s} \frac{K}{s^2 + 5s + \alpha} = 9$$

Ne consegue che

$$\frac{K}{\alpha} = 9$$

La funzione globale ad anello chiuso vale

$$G_{TOT} = \frac{K}{s^2 + 5s + K + \alpha}$$

e tende, con entrata gradino verso il valore  $y = 0.9$

Ne consegue che

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = s \frac{1}{s} \frac{K}{s^2 + 5s + K + \alpha} = 0.9$$

Da cui

$$\frac{K}{K + \alpha} = 0.9$$

Il sistema non può essere risolto, e resta come risultato solo il rapporto

$$\frac{K}{\alpha} = 9$$

### 3.16 Esercizio

Viene dato lo schema di figura 3.17. Determinare mediante un diagramma di flusso di segnali la funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema.

In seguito determinare il valore di  $K$ , in modo che il sistema ad anello chiuso abbia due poli reali, di cui uno a  $-8$ .

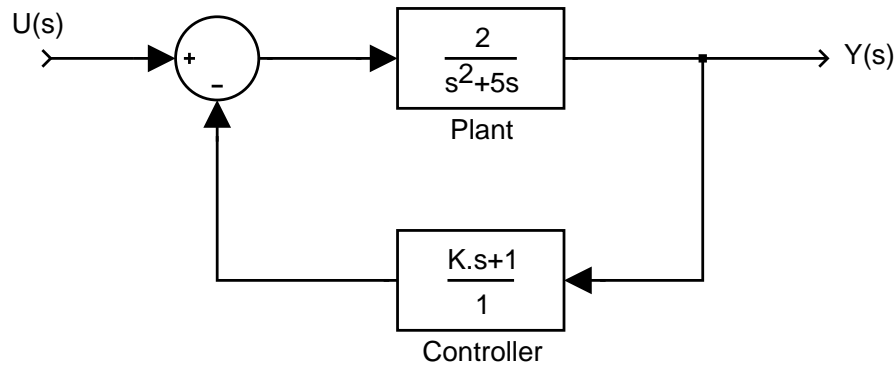


Figura 3.17: Schema per l'esercizio 3.16

**Soluzione:** La figura 3.18 mostra il diagramma di flusso di segnali associato allo schema precedente.

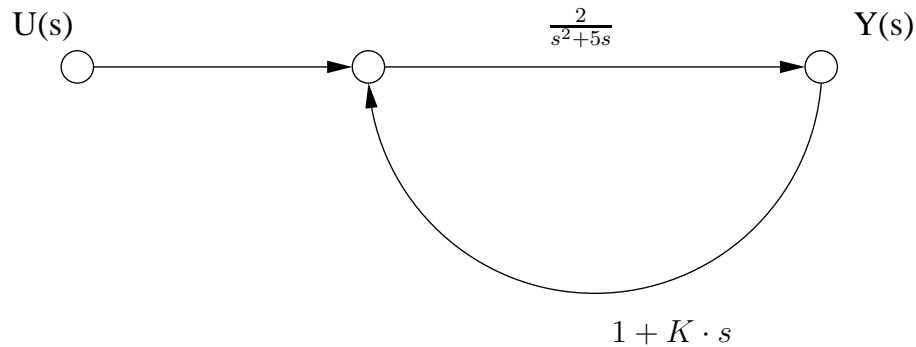


Figura 3.18: Diagramma di flusso di segnali per l'esercizio 3.16

Abbiamo un percorso

$$P = \frac{2}{s^2 + 5s}$$

e un loop

$$L = -\frac{2}{s^2 + 5s}(1 + K \cdot s)$$

La funzione di trasferimento globale vale quindi

$$G(s) = \frac{P}{1 - L} = \frac{2}{s^2 + (2K + 5)s + 2}$$

Il denominatore ha la funzione

$$(s + p_1) \cdot (s + p_2) = (s + 8) \cdot (s + p_2) = s^2 + (8 + p_2)s + 8 \cdot p_2$$

In paragone di coefficienti fornisce

$$8 \cdot p_2 = 8 \rightarrow p_2 = 0.25$$

e quindi

$$8 + p_2 = 2K + 5 \rightarrow K = \frac{8.25 - 5}{2} = 1.625$$

### 3.17 Esercizio

La risposta ad un **gradino unitario** di un sistema di **2. ordine**, con condizioni iniziali nulle, è rappresentata nella figura 3.19. Determinare nel modo più preciso possibile la funzione di trasferimento di questo sistema.

**Soluzione:** Il valore massimo della funzione vale ca. 0.28 cui equivale un  $\%OS = 40\%$ . A questo valore corrisponde un  $\xi = 0.3$ . Un periodo dura ca. 1.3s. Ne consegue

$$\omega_\sigma = \frac{2 \cdot \pi}{1.3} = 4.83s$$

$$\omega_n = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2}} \simeq 5$$

La funzione di trasferimento è pertanto

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 25}$$

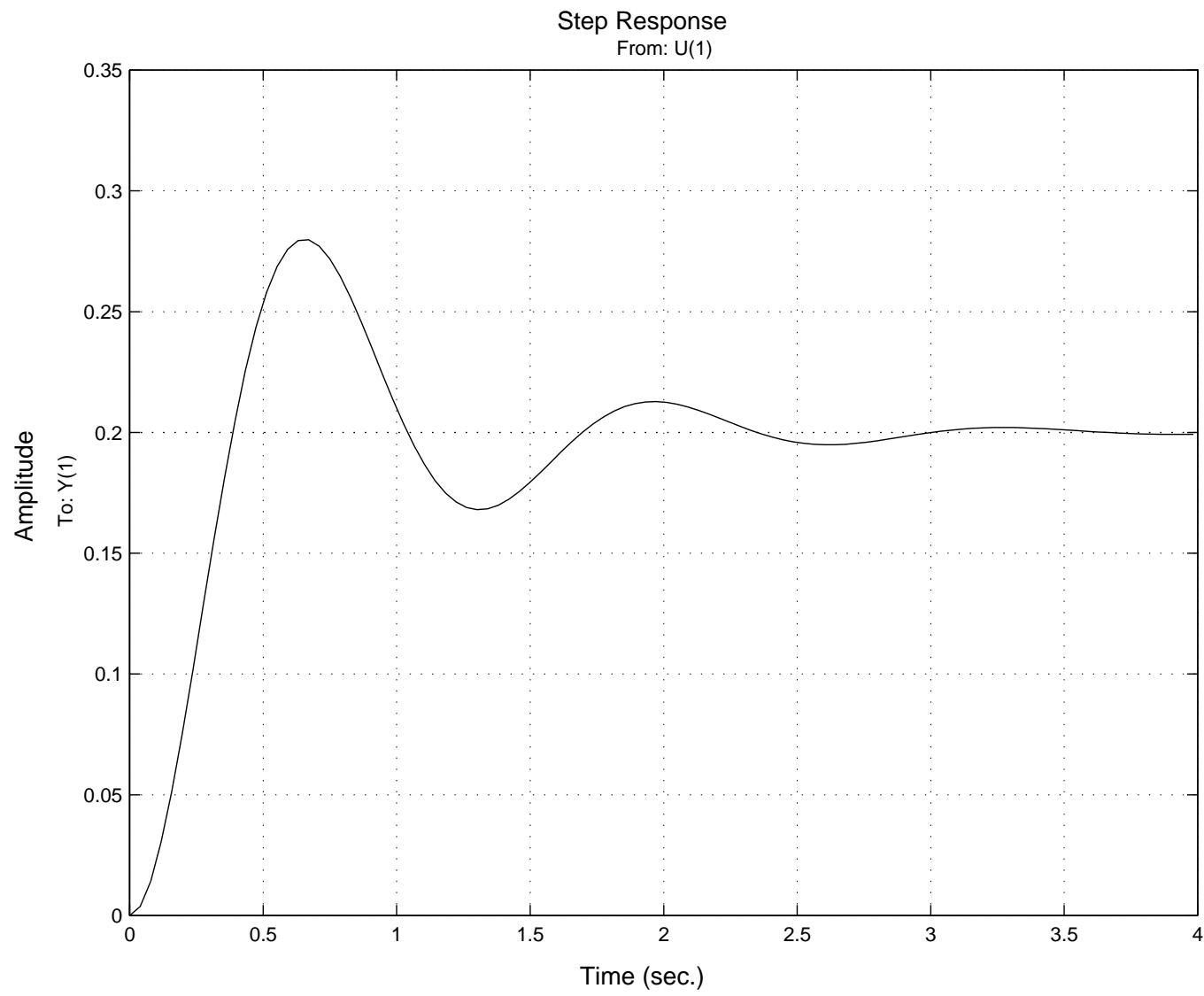


Figura 3.19: Risposta del processo dell'esercizio 3.17



### 3.18 Esercizio

La figura 3.21 mostra la risposta ad una entrata gradino unitario del sistema della figura 3.20.

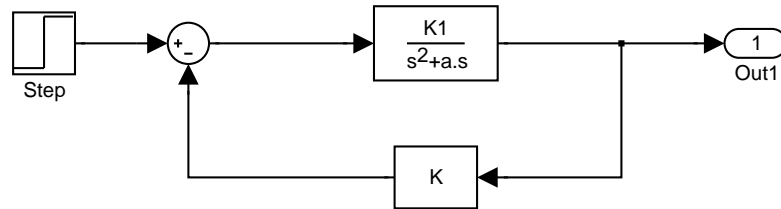


Figura 3.20: Sistema dell'esercizio 3.18

Determinare nel modo più preciso possibile i valori di  $K_1$ ,  $K$  e  $a$ .

**Soluzione:** La funzione di trasferimento del sistema vale

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2 + as + K_1K}$$

Il valore finale verso cui tende la funzione è  $y(t) \Rightarrow .125$ . Il valore massimo vale 0.22 cui equivale  $\%OS = 75\%$  e  $\xi = 0.09$ .

Il 3. picco massimo equivale al 5. valore di massimo/minimo della funzione ed e' a ca. 4s.

$$\omega_n = \frac{5\pi}{4\sqrt{1 - \xi^2}}$$

La funzione risultante vale ca.

$$G(s) = \frac{1.94}{s^2 + 0.72s + 15.55}$$

Il paragone di coefficienti fornisce

$$K = 8 \quad K_1 = 1.94 \quad a = 0.72$$

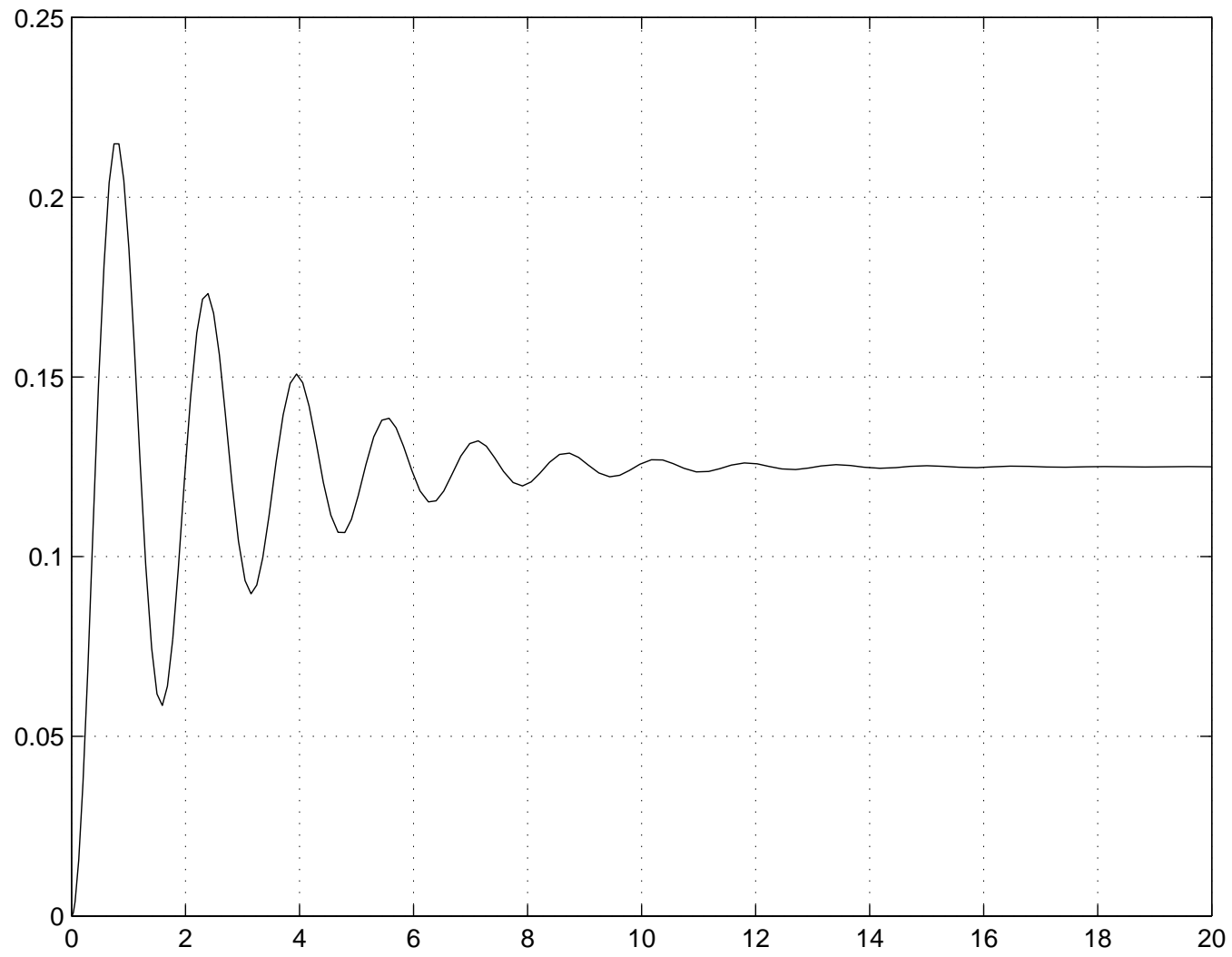


Figura 3.21: Risposta del processo dell'esercizio 3.18

### 3.19 Esercizio

La risposta ad un'entrata gradino unitario di un sistema incognito di 2. ordine è rappresentata nella figura 3.22. Determinare la funzione di trasferimento che meglio approssima l'andamento della risposta.

**Soluzione:** Il valore finale è  $y_{fin} = 0.25$  e il valore massimo è  $y_{max} = 0.38$ . Abbiamo quindi un valore di  $\%OS = 52\%$  con  $\xi = 0.2$ .

3 periodi vanno da  $0.4s$  a  $4.25s$  con quindi il periodo  $T = 1.28s$

$$\omega_\sigma = \frac{2\pi}{T} = 4.9$$

e

$$\omega_n = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2}} \simeq 5$$

La funzione risultante è

$$G(s) = \frac{6.25}{s^2 + 2s + 25}$$

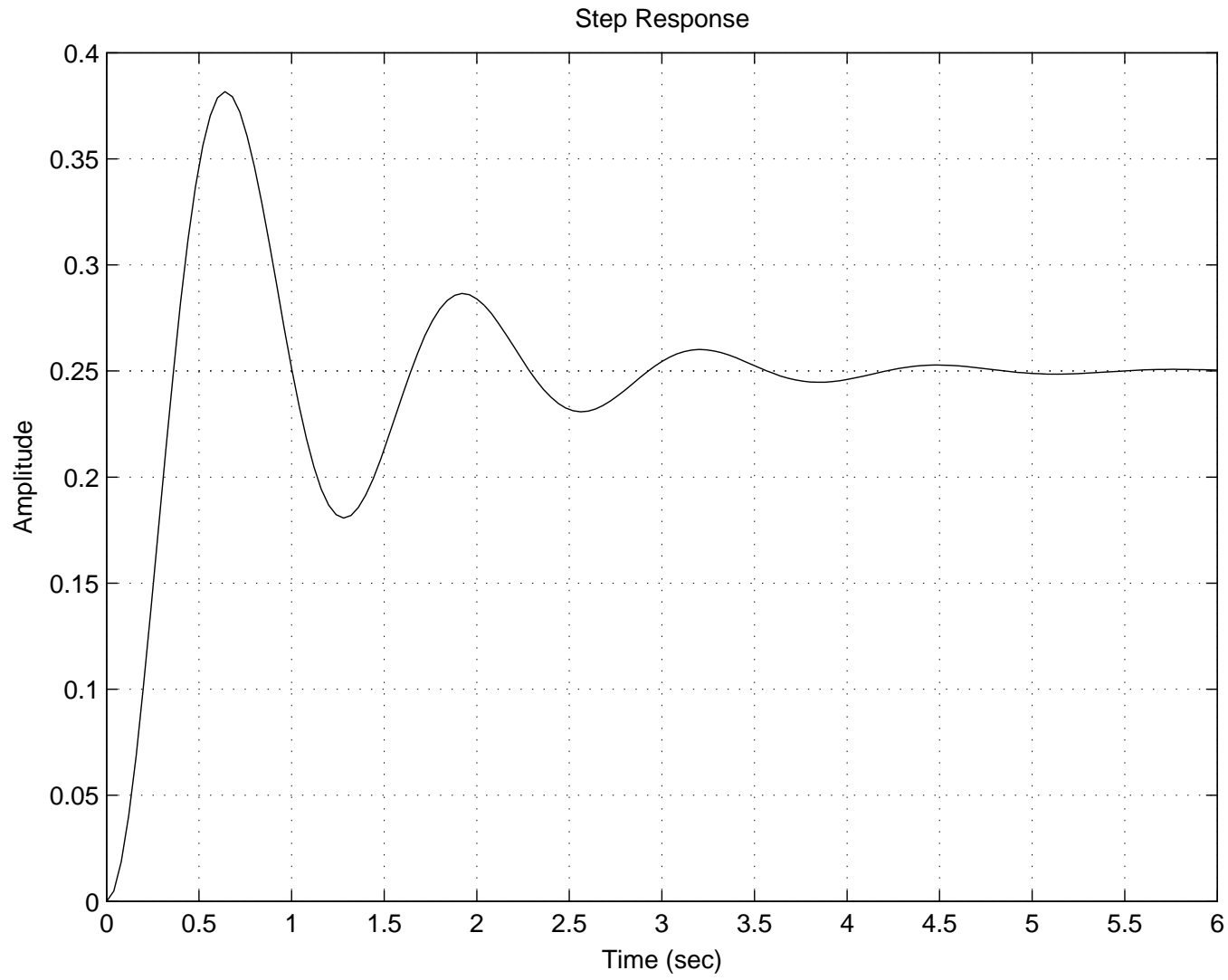


Figura 3.22: Risposta del processo dell'esercizio 3.19

### 3.20 Esercizio

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 3.23.

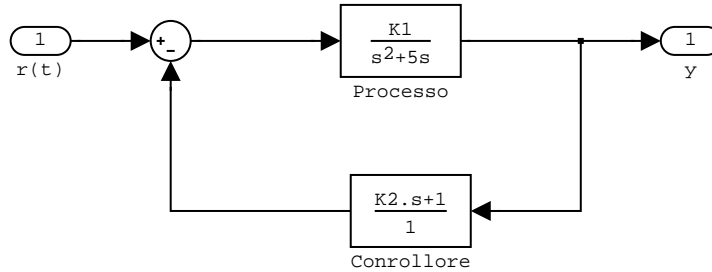


Figura 3.23: Sistema dell'esercizio 3.20

Determinare

1. I valori di  $K_1$  e  $K_2$  che permettono di ottenere un sistema con  $\%OS = 10\%$  e  $T_{setting} = 1s$ .
2. Il tempo del primo picco
3. Il valore finale verso cui tende il sistema ad anello chiuso con entrata gradino unitario.

**Soluzione:** La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_d(s) = \frac{K_1}{s^2 + (5 + K_1 \cdot K_2) \cdot s + K_1}$$

Le caratteristiche dinamiche forniscono i valori  $\xi = 0.59$  e  $\omega_n = 6.98$ .

Conseguentemente si ottiene:

$$K_1 = \omega_n^2 = 48.738$$

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 5 + K_1 \cdot K_2 \rightarrow K_2 = 0,06677$$

Il tempo del primo picco vale

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 0.558$$

Applicando il teorema del valore finale si ottiene un valore finale di 1.

### 3.21 Esercizio

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 3.24.

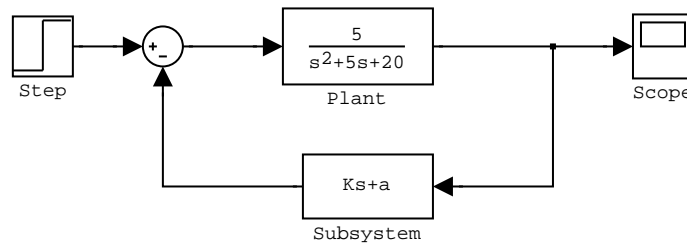


Figura 3.24: Sistema dell'esercizio 3.21

Determinare

1. I valori di  $K$  e  $a$  che permette di ottenere un sistema con  $\%OS = 4\%$  e un  $T_{setting} \leq 1.2s$ .
2. Il tempo del primo picco
3. Il valore finale verso cui tende il sistema ad anello chiuso con entrata gradino unitario.

**Soluzione:** La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{cl}(s) = \frac{5}{s^2 + 5 \cdot (1 + K) \cdot s + 20 + 5a}$$

Le caratteristiche dinamiche forniscono i valori  $\xi = 0.7156$  e  $\omega_n = 5$ .

Conseguentemente si ottiene:

$$20 + 5a = \omega_n^2 = 25 \rightarrow a = 1$$

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 5 \cdot (1 + K) \rightarrow K = 0.4313$$

Il tempo del primo picco vale

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 0.9s$$

Applicando il teorema del valore finale si ottiene un valore finale di 0.2.

### 3.22 Esercizio

Per il sistema della figura 3.25 determinare:

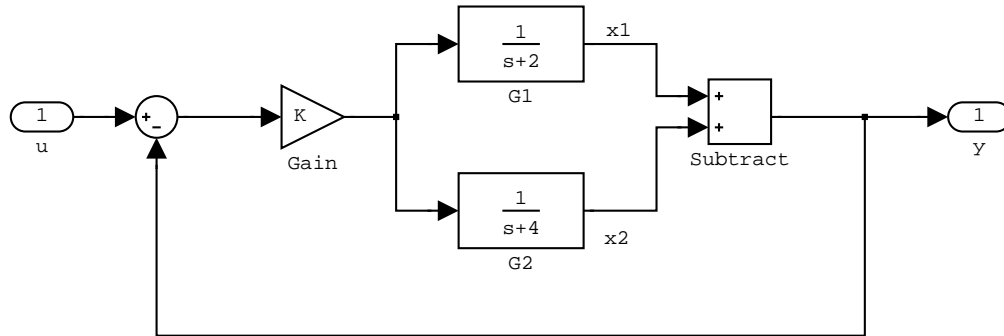


Figura 3.25: Sistema dell'esercizio 3.22

1. Il diagramma di flusso di segnali.
2. La rappresentazione di stato con le variabili di stato  $x_1$  e  $x_2$  come da schema dato.
3. La funzione di trasferimento tra l'entrata  $u$  e l'uscita  $y$  del sistema dal diagramma di flusso e dalla rappresentazione di stato.
4. Il valore di  $K$  che permette di avere un %OS del 5%.
5. Il tempo di setting del sistema.

**Soluzione:** La figura 3.26 mostra il diagramma di flusso di segnali associato al sistema.

La rappresentazione di stato del sistema si trova da

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2} \cdot (K \cdot U(s) - K \cdot X_1(s) - K \cdot X_2(s))$$

$$\rightarrow \dot{x}_1 = -(2+K) \cdot x_1 - K \cdot x_2 + K \cdot u$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+4} \cdot (K \cdot U(s) - K \cdot X_1(s) - K \cdot X_2(s))$$

$$\rightarrow \dot{x}_2 = -K \cdot x_1 - (K+4) \cdot x_2 + K \cdot u$$

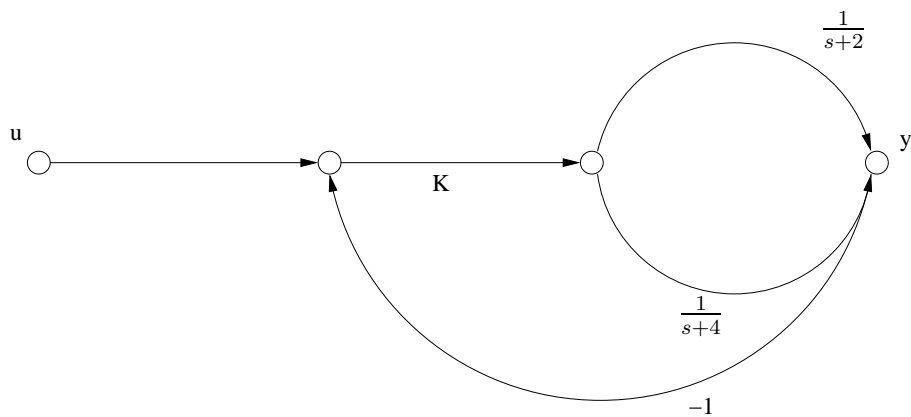


Figura 3.26: Diagramma di flusso dell'esercizio 3.22

$$y = x_1 + x_2$$

Le matrici di stato associate al sistema sono

$$A = \begin{bmatrix} -(2+K) & -K \\ -K & -(4+K) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 1]$$

$$D = 0$$

La funzione di trasferimento calcolata tramite il diagramma di flusso di segnali diventa

$$P_1 = \frac{K}{s+2}$$

$$P_2 = \frac{K}{s+4}$$

$$L_1 = -\frac{K}{s+2}$$



$$L_2 = -\frac{K}{s+4}$$

$$G(s) = \frac{P_1 + P_2}{1 - L_1 - L_2} = \frac{2(s+3)K}{2sK + 6K + s^2 + 6s + 8}$$

La funzione di trasferimento può essere calcolata dalle matrici

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = \frac{2(s+3)K}{2sK + 6K + s^2 + 6s + 8}$$

Il fattore di smorzamento associato al %OS dato vale  $\xi = 0.69$

### 3.23 Esercizio

Viene dato lo schema della figura 3.27.

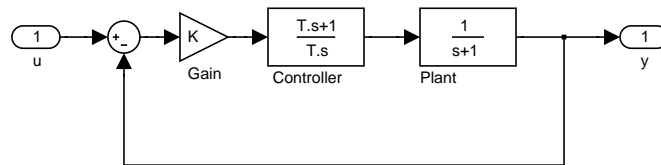


Figura 3.27: Schema per l'esercizio 3.23

Determinare il valore dell'amplificazione  $K$  e del tempo  $T$  in modo che il sistema completo risultante abbia un  $\%OS \leq 10\%$  e un  $T_{setting} \leq 2s$ .

**Soluzione:** La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_t(s) = \frac{K \cdot s + K/T}{s^2 + (K + 1) \cdot s + K/T}$$

I parametri di  $\%OS$  e  $T_{setting}$  si associano ai valori  $\xi = 0.591$  e  $\omega_n = 3.490$ ;

Un paragone di coefficienti fornisce

$$(K + 1) = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 4.127 \rightarrow K = 3.127$$

e

$$\frac{K}{T} = \omega_n^2 = 12.184471 \rightarrow T = \frac{K}{\omega_n^2} = 0.257$$

### 3.24 Esercizio

Un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a \cdot s + b}$$

contiene le incognite  $K$ ,  $a$  e  $b$ .

Questo processo viene utilizzato con un feedback unitario come da figura 3.28.

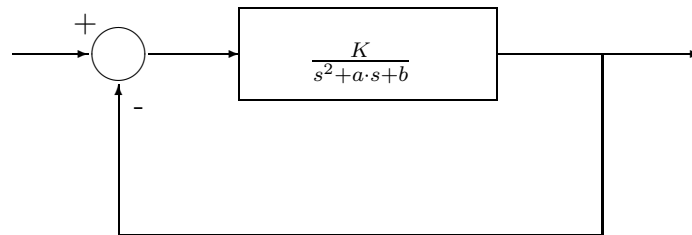


Figura 3.28: Processo dell'esercizio 3.24

La risposta temporale di questo sistema in feedback unitario con entrata gradino unitario mostra le caratteristiche seguenti (vedi figure 3.29):

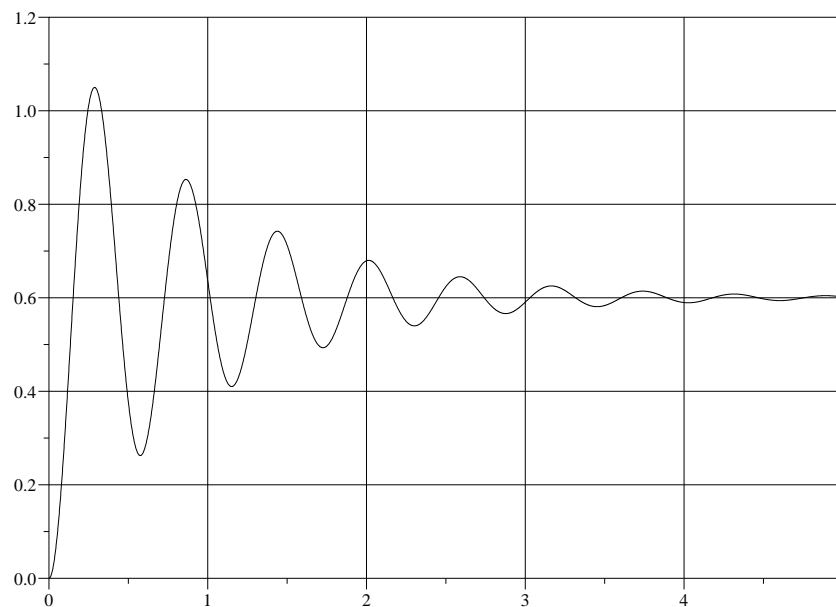


Figura 3.29: Risposta al gradino del sistema dell'esercizio 3.24

- Il sistema è sottosmorzato

- Il valore finale tende a 0.6 (valore letto sul grafico della risposta)
- Il massimo overshooting vale 1.05 (valore letto sul grafico della risposta)
- Un periodo di oscillazione dura 0.5754s (valore letto sul grafico della risposta)

Determinare i valori  $K$ ,  $a$  e  $b$  e la funzione di trasferimento

**Soluzione:**

Determiniamo inizialmente il %OS del sistema

$$\%OS = 100 \frac{1.05 - 0.6}{0.6} = 75\%$$

cui è associato un valore  $\xi = 0.0912$ .

Dal periodo di oscillazione troviamo

$$\omega_\sigma = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 10.92$$

e quindi

$$\omega_n = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 10.96537$$

Il paragone di coefficienti del denominatore fornisce

$$a = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 2$$

$$b = \omega_n^2 = 120.24$$

e dal valore finale troviamo

$$K = \omega_n^2 * 0.6 = 72.14$$

### 3.25 Esercizio

Il sistema della figura 3.30 ha la risposta mostrata nella figura 3.31. La funzione  $G(s)$  ha 2 poli e nessuno 0.

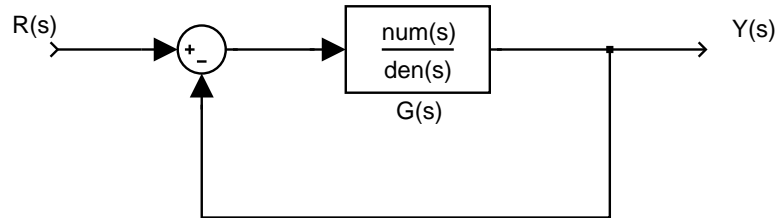


Figura 3.30: Sistema dell'esercizio 3.25

Determinare la funzione di trasferimento  $G(s)$ .

**Soluzione:**

Se la funzione ad anello aperto vale

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a \cdot s + b}$$

La funzione ad anello chiuso vale

$$G_{ts} = \frac{K}{s^2 + a \cdot s + b + K}$$

Dal grafico misuriamo  $y_{max} = .35$  e  $y_{fin} = .2$ . Pertanto possiamo calcolare

$$\%OS = 100 \cdot \frac{y_{max} - y_{fin}}{y_{fin}} = 75\%$$

A questo  $\%OS$  corrisponde  $\xi = 0.0912$ . Possiamo misurare 4 periodi a partire da  $2s$  e vediamo che durano ca.  $4.5s$ . Possiamo quindi ora determinare  $\omega_n$ .

$$T = \frac{4.5}{4} = 1.125$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = 5.585$$

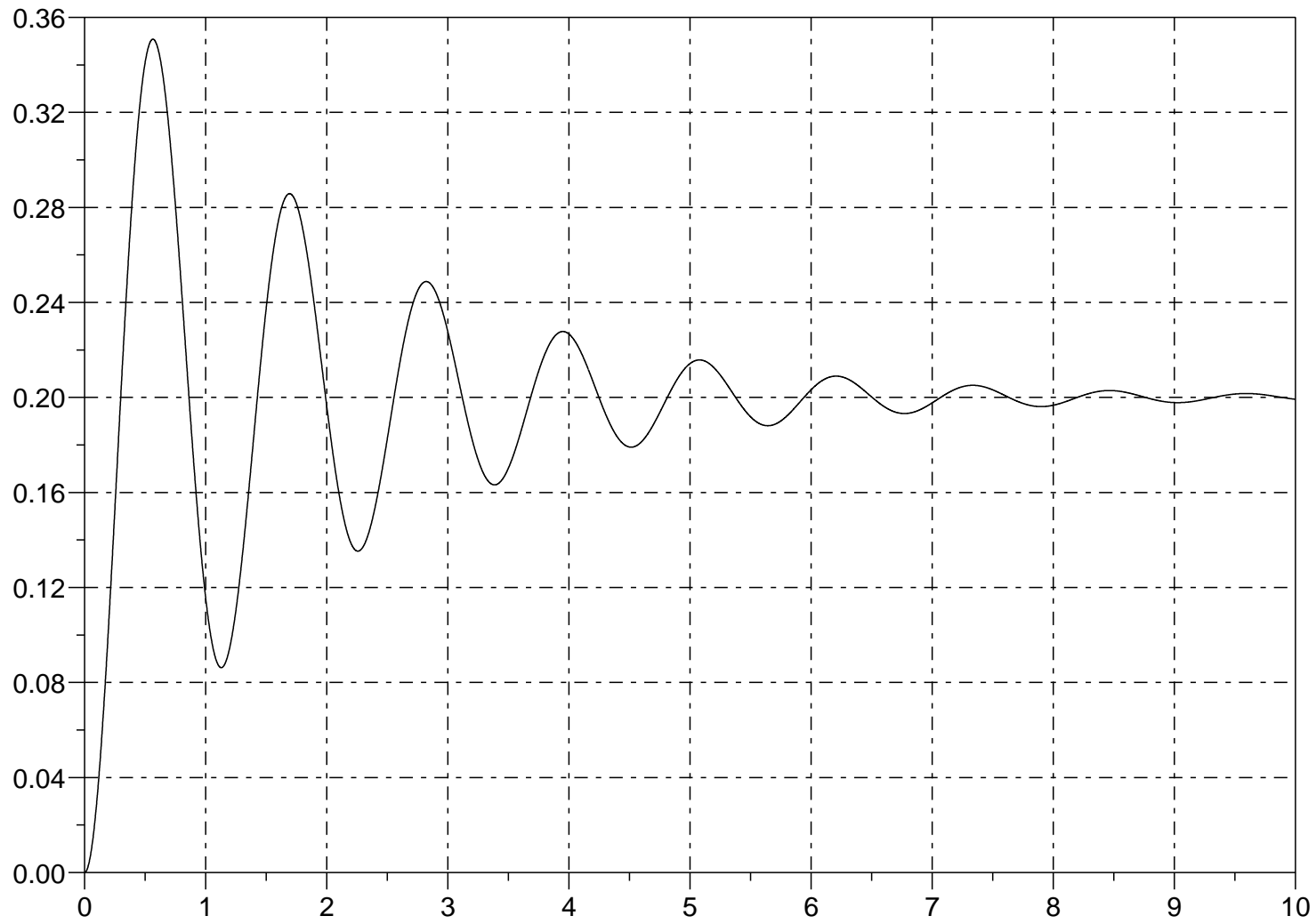


Figura 3.31: Risposta del sistema dell'esercizio 3.25

$$\omega_n = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 5.61$$

Considerando il valore finale, la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso vale quindi

$$G_{closed}(s) = \frac{0.2 \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{6.291}{31.454 + 1.023s + s^2}$$

Un paragone di coefficienti con la funzione  $G_t(s)$  trovata precedentemente ci fornisce:

$$K = 6.291$$

$$a = 1.023$$

$$b = 31.454 - K = 25.16$$

### 3.26 Esercizio

Viene dato il processo rappresentato nella figura 3.32.

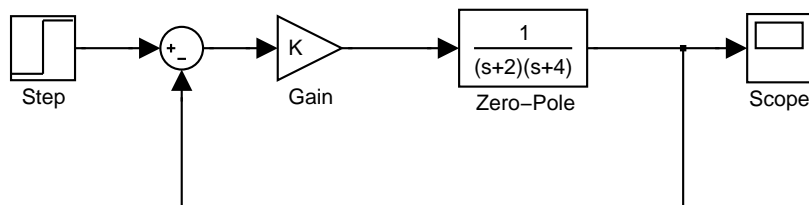


Figura 3.32: Processo dell'esercizio 3.26

In entrata viene applicato un segnale "gradino unitario". L'errore  $E(s)$  è il valore del segnale  $Step - Y(s)$ , misurabile subito dopo il nodo sommatore-sottrattore all'entrata.

Determinare:

1. Determinare il valore della grandezza  $E(s)$  in funzione di  $K$ . Quanto vale  $e(t)$  con  $t \rightarrow \infty$ ?
2. Se si vuole avere un errore al tempo infinito pari a 0.1, quanto deve valere  $K$ ?
3. Quanto valgono  $\%OS$  e  $T_{setting}$  con questo valore di  $K$ ?
4. Quanto deve valere  $K$  per avere un  $\%OS$  pari al 10%?
5. È possibile, sostituendo  $K$  con una funzione di trasferimento  $G_R(s)$ , ottenere un valore di  $e(t)$  con  $t \rightarrow \infty$  pari a 0? Se sì, qual'è in questo caso la funzione  $G_R(s)$  più semplice che si può utilizzare?

**Soluzione:** Costruendo un semplice diagramma di flusso di segnali possiamo trovare la funzione di trasferimento tra  $R(s)$  e  $E(s)$ .

$$E(s) = R(s) \frac{1}{1 + K \cdot G(s)}$$

Applicando il teorema del valore finale e mettendo un gradino in entrata troviamo

$$e_{infy} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{(s+2)(s+4)}} = \frac{8}{K + 8}$$

Se si vuole avere un valore di  $e_{\infty} = 0.1$  occorre



$$\frac{8}{K+8} = 0.1 \rightarrow K = 72$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{closed}(s) = \frac{K}{s^2 + 6 \cdot s + 8 + K}$$

Con  $K = 72$  troviamo

$$G_{closed}(s) = \frac{72}{s^2 + 6 \cdot s + 80}$$

Quindi

$$\omega_n = \sqrt{80}$$

e

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 6 \rightarrow \xi = 0.335$$

Applicando le formule troviamo per questi valori

$$\%OS = 32.68\%$$

e

$$T_{setting} = 1.324s$$

Se vogliamo avere un  $\%OS = 10$  ci occorre abbiamo bisogno un valore di  $\xi = 0.59$ .  
Con questo valore di  $\xi$  troviamo

$$\omega_n = \frac{6}{2 \cdot \xi} = 5.075$$

e conseguentemente

$$K = \omega_n^2 - 8 = 17.754$$

Se vogliamo avere un errore nullo dobbiamo ottenere  $\infty$  al denominatore di  $E(s)$ . Questo è possibile solo se si riesce a mettere un polo a 0. La funzione  $G_R(s)$  deve quindi avere almeno un polo a 0. Un integratore ad esempio permetterebbe di annullare l'errore  $e_\infty$ .

### 3.27 Esercizio

Il sistema della figura 3.33 è formato da un loop interno con feedback  $K_1$  e da un secondo loop esterno con guadagno  $K_2$ .

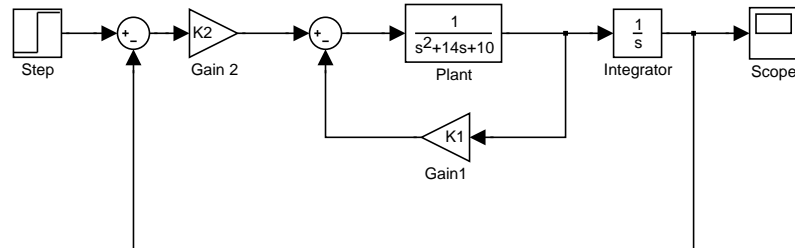


Figura 3.33: Sistema dell'esercizio 3.27

Determinare

1. Il valore di  $K_1$  che porta il loop interno ad essere smorzato criticamente. Continuare il lavoro con questo valore di  $K_1$ .
2. Il valore di  $K_2$  per cui il sistema oscilla.

**Soluzione:** La funzione di trasferimento del loop interno vale

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 14s + 10 + K_1}$$

Per avere un sistema criticamente smorzato occorre avere il valore di  $\xi = 1$ . Conseguentemente

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_{n1} \cdot s = 14 \rightarrow \omega_{n1} = 7$$

Il valore di  $K_t$  può essere ora calcolato da

$$10 + K_1 = \omega_{n1}^2 \rightarrow K = \omega_{n1}^2 - 10 = 39$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo vale

$$G(s) = \frac{K_2}{s^3 + 14s^2 + 49s + K_2}$$

Il denominatore deve avere due poli immaginari e un polo reale, per cui deve valere

$$(s^2 + \omega_n^2)(s + p) = s^3 + p \cdot s^2 + \omega_n^2 \cdot s + p \cdot \omega_n^2$$

Un paragone di coefficienti ci fornisce

$$p = 14$$

$$\omega_n = 7$$

$$\omega_n^2 \cdot p = K_2 \rightarrow K_2 = 686$$

### 3.28 Esercizio

Il sistema della figura 3.34 ha la risposta mostrata nella figura 3.35. La funzione  $G(s)$  ha 2 poli e nessuno 0.

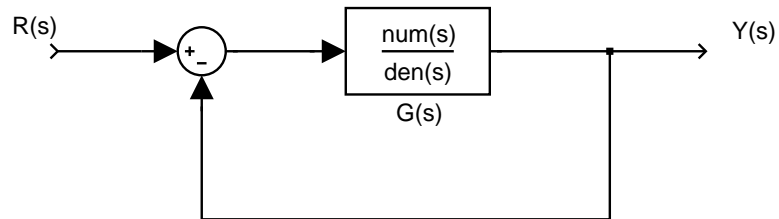


Figura 3.34: Sistema dell'esercizio 3.28

Determinare la funzione di trasferimento  $G(s)$ .

**Soluzione:** Se la funzione ad anello aperto vale

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a \cdot s + b}$$

La funzione ad anello chiuso vale

$$G_{ts} = \frac{K}{s^2 + a \cdot s + b + K}$$

Dal grafico misuriamo  $y_{max} = .35$  e  $y_{fin} = .2$ . Pertanto possiamo calcolare

$$\%OS = 100 \cdot \frac{y_{max} - y_{fin}}{y_{fin}} = 75\%$$

A questo  $\%OS$  corrisponde  $\xi = 0.0912$ . Possiamo misurare 7 periodi a partire da  $0.5s$  e vediamo che durano ca.  $5s$ . Possiamo quindi ora determinare  $\omega_n$ .

$$T = \frac{5}{7} = 0.714$$

$$\omega_\sigma = \frac{2\pi}{T} = 8.795$$

$$\omega_n = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 8.833$$

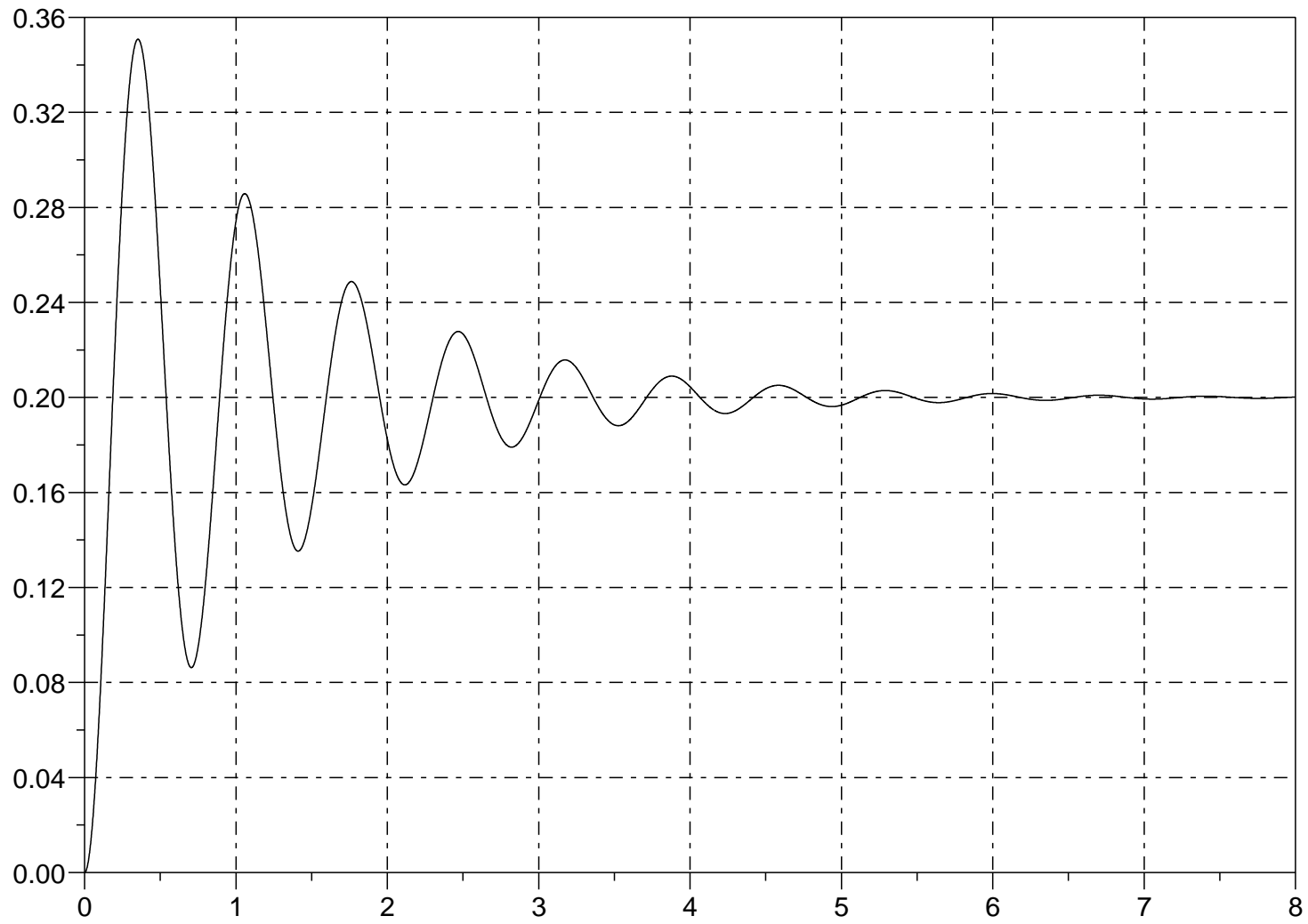


Figura 3.35: Risposta del sistema dell'esercizio 3.28

Considerando il valore finale, la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso vale quindi

$$G_{closed}(s) = \frac{0.2 \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{15.605}{78.0265 + 1.611s + s^2}$$

Un paragone di coefficienti con la funzione  $G_t(s)$  trovata precedentemente ci fornisce:

$$K = 15.605$$

$$a = 1.611$$

$$b = 78.0265 - K = 62.21$$

### 3.29 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 3.36.

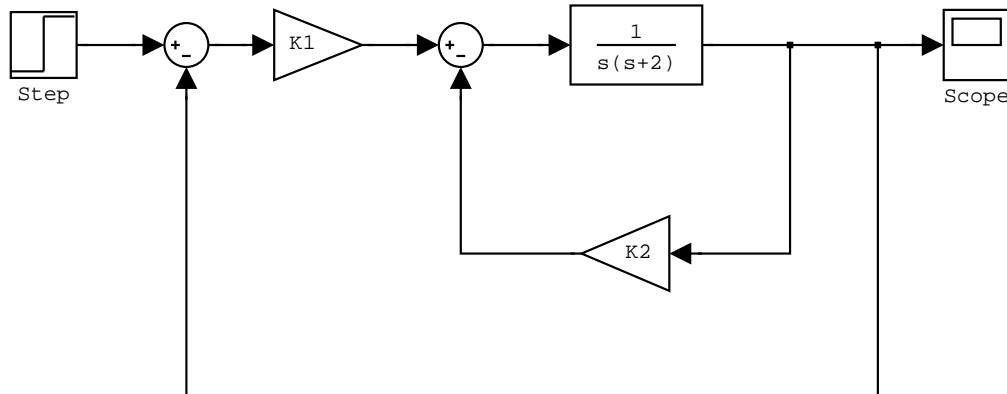


Figura 3.36: Sistema dell'esercizio 3.29

Determinare:

1. Il valore di  $K_2$  che permette di avere il loop interno criticamente smorzato.
2. Il valore di  $K_1$  che permette di ottenere un sistema globale con  $\%OS = 10\%$ .
3. Il  $T_{setting}$  del sistema.

**Soluzione:** La funzione di trasferimento del loop interno vale

$$G_{int}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + K_2}$$

Per avere un sistema smorzato criticamente abbiamo  $\xi = 1$ . Quindi

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 2 \rightarrow \omega_n = 1$$

Da denominatore di  $G_{int}(s)$  possiamo vedere che

$$K_2 = \omega_n^2 = 1$$

La funzione di trasferimento globale del sistema vale

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2s + K_1 + K_2}$$



Per avere  $\%OS = 10$  occorre un valore  $\xi = 0.59$ . In questo caso abbiamo

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 2 \rightarrow \omega_n = 1.692$$

e conseguentemente

$$K_1 + K_2 = \omega_n^2 \rightarrow K_1 = \omega_n^2 - K_2 = 1.862$$

### 3.30 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 3.37.

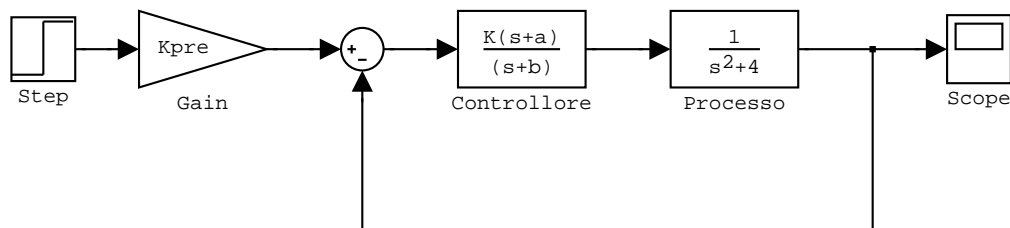


Figura 3.37: Sistema dell'esercizio 3.30

Inizialmente utilizzate un valore  $K_{pre} = 1$

1. Determinare i valori  $K$ ,  $a$  e  $b$ , in modo che il sistema globale abbia tutti i poli a  $-2$ .
2. Il valore finale cui tende il sistema con un'entrata gradino unitario (utilizzare il teorema del valore finale di Laplace).
3. Il valore di  $K_{pre}$  che permette di tendere verso il valore finale 1.

**Soluzione:** La funzione di trasferimento globale del sistema vale

$$G(s) = K_{pre} \cdot \frac{K \cdot (s + a)}{s^3 + b \cdot s^2 + (K + 4) \cdot s + aK + 4b}$$

Il denominatore deve essere uguale a

$$(s + 2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

Un semplice paragone di coefficienti fornisce

$$B = 6$$

$$K = 8$$

$$a = \frac{8 - 4b}{K} = -2$$

Con i valori trovati e applicando il teorema del valore finale di Laplace troviamo che la risposta della funzione tende a

$$y_{\infty} = \frac{aK}{aK + 4b} = \frac{-16}{8} = -2$$

Sfruttando la linearità del sistema possiamo subito vedere che per avere un'uscita  $y_{\infty} = 1$  dobbiamo moltiplicare il segnale in entrata con

$$K_{pre} = -0.5$$

### 3.31 Esercizio

Dopo l'analisi di un sistema sono state scritte le equazioni seguenti:

$$x_1 = K_{pre} \cdot F - (1 + K_2 \cdot s) \cdot y$$

$$\dot{x}_2 = K_1 \cdot x_1$$

$$y = \frac{5}{s+4} \cdot x_2$$

Qual'è la variabile indipendente del sistema?

Determinare

1. Il diagramma di flusso di questo sistema.
2. La funzione di trasferimento tra l'entrata indipendente trovata precedentemente e la variabile  $y$ .
3. Con il valore  $K_{pre} = 1$  determinare i valori di  $K_1$  e  $K_2$  in modo che il sistema globale presenti le seguenti caratteristiche:
  - $\%OS = 4\%$
  - $T_{setting} = 1.2s$
4. Il valore di  $K_{pre}$  che permette di portare il valore finale a 1 con entrata gradino unitario.

**Soluzione:** La figura 3.38 mostra il diagramma di flusso di segnali associato alle equazioni date.

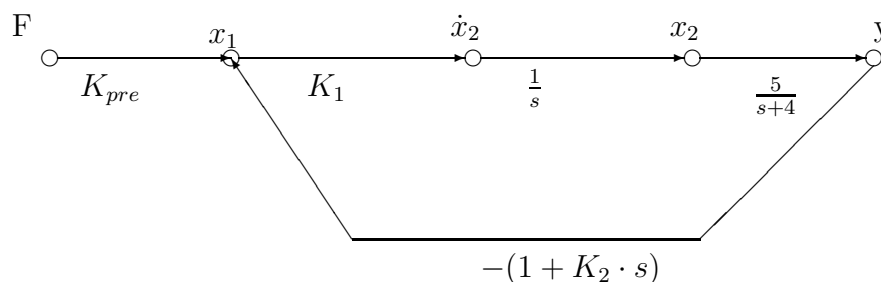


Figura 3.38: Diagramma di flusso dell'esercizio 3.31

La variabile indipendente è la grandezza  $F$ .

La funzione di trasferimento tra  $F$  e  $y$  vale

$$G(s) = \frac{5 \cdot K_{pre} \cdot K_1}{s^2 + (4 + 5K_1K_2) \cdot s + 5K_1}$$

Un sistema con il %OS e il  $T_{setting}$  dato ha i valori  $\xi = 0.7156$  e  $\omega_n = 4.97$ . Pertanto il suo denominatore vale

$$den(s) = 24.73314 + 7.118159s + s^2$$

Un paragone di coefficienti ci fornisce quindi

$$5K_1 = 24.733 \rightarrow K_1 = 4.947$$

$$4 + 5K_1K_2 = 7.118 \rightarrow K_2 = \frac{7.118 - 4}{5K_1} = 0.126$$

Il teorema del valore finale ci dice che per avere un valore di  $y_\infty = 1$  occorre avere

$$5 \cdot K_1 K_{pre} = 5 \cdot K_1 \rightarrow K_{pre} = 1$$

### 3.32 Esercizio

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 3.39.

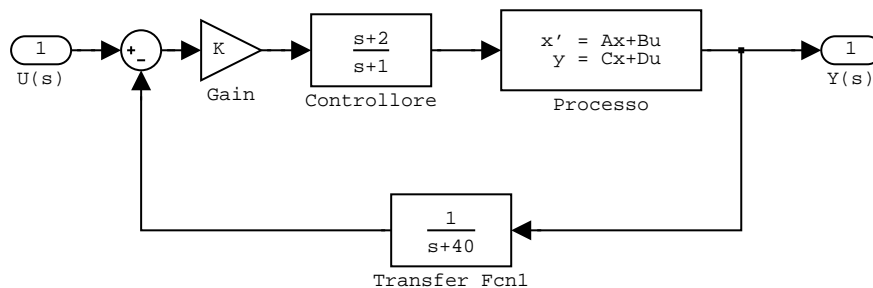


Figura 3.39: Sistema dell'esercizio 3.32

Le matrici del processo valgono

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -2.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0.5]$$

$$D = 0$$

mentre l'amplificazione del controllore vale  $K = 1000$ .

Determinare

1. La funzione di trasferimento

$$G_{tot}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

2. I valori approssimati di  $\%OS$  e  $T_{setting}$  del sistema  $U(s) \rightarrow Y(s)$ . Quanto affidabili sono questi valori e perché?

**Soluzione:** La funzione di trasferimento del sistema descritto dalla matrici  $A, B, C, D$  vale

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 10}$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{tot} = \frac{K \cdot G_1 \cdot G_2}{1 + K \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} = 1000 \cdot \frac{s + 40}{s^3 + 46s^2 + 245s + 1200}$$

Le radici del numeratore si trovano a  $-40$ , mentre quelle del denominatore sono a

$$-40.7$$

e

$$-2.6473 \pm 4.74i$$

Lo zero del sistema e il polo supplementare ( $-40.7$ ) sono molto a sinistra rispetto ai 2 poli  $-2.6473 \pm 4.74i$  che possono quindi essere considerati come dominanti e determinano quindi il comportamento dinamico del sistema.

Sapendo che i poli si trovano a

$$-\xi\omega_n \pm i \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -2.6473 \pm 4.74i$$

troviamo

$$\omega_n = 5.43$$

e

$$\xi = 0.4876$$

Conseguentemente applicando le formule 1.63 e 1.67 dello script troviamo

$$\%OS = 17.3\%$$

e

$$T_{setting} = 1.53$$

### 3.33 Sistemi

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 3.40.

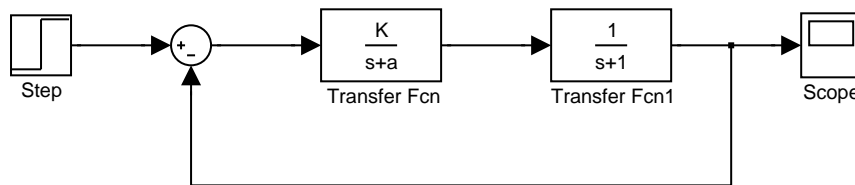


Figura 3.40: Sistema dell'esercizio 3.33

Determinare i valori di  $K$  e  $a$  che permettono di avere un sistema con  $\%OS = 10\%$  e  $T_{setting} = 1s$ .

**Soluzione:** I valori di  $\%OS$  e  $T_{setting}$  forniscono i seguenti valori per  $\xi$  e  $\omega_n$

$$\xi = 0.5912$$

e

$$\omega_n = 6.9812525$$

Il denominatore della funzione desiderata vale quindi

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = s^2 + 8.254 \cdot s + 48.73$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema vale

$$G_{tot}(s) = \frac{\frac{K}{(s+a)(s+1)}}{1 + \frac{K}{(s+a)(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + (a+1) \cdot s + a + K}$$

Il paragone di coefficienti tra il denominatore desiderato e il denominatore di  $G_{tot}(s)$  fornisce

$$a = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n - 1 = 7.254$$

e

$$K = \omega_n^2 - a = 41.4839$$



### 3.34 Sistemi

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 3.41.

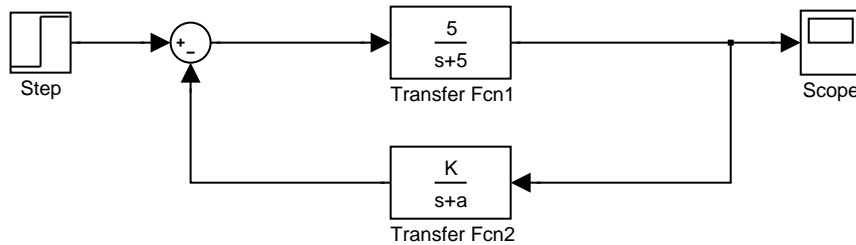


Figura 3.41: Sistema dell'esercizio 3.34

Determinare:

- i valori di  $K$  e  $a$  che permettono di avere un sistema con  $\%OS = 5\%$  e  $T_{setting} = 1s$ .
- Il valore finale verso cui tende il sistema con entrata gradino unitario.

**Soluzione:** I valori di  $\%OS$  e  $T_{setting}$  forniscono i seguenti valori per  $\xi$  e  $\omega_n$

$$\xi = 0.69$$

e

$$\omega_n = 6.1373$$

Il denominatore della funzione desiderata vale quindi

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = s^2 + 8.47 \cdot s + 37.666$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema vale

$$G_{tot}(s) = \frac{\frac{5 \cdot (s+a)}{(s+a)(s+5)}}{1 + \frac{5K}{(s+a)(s+5)}} = \frac{5 \cdot (s+a)}{s^2 + (a+5) \cdot s + 5a + 5K}$$

Il paragone di coefficienti tra il denominatore desiderato e il denominatore di  $G_{tot}(s)$  fornisce

$$a = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n - 5 = 3.47$$

e

$$K = \frac{\omega_n^2 - 5a}{5} = 4.06$$

Il sistema tende verso il valore finale

$$\frac{5 \cdot a}{5 \cdot a + 5 \cdot K} = 0.461$$

### 3.35 Sistemi

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 3.42.

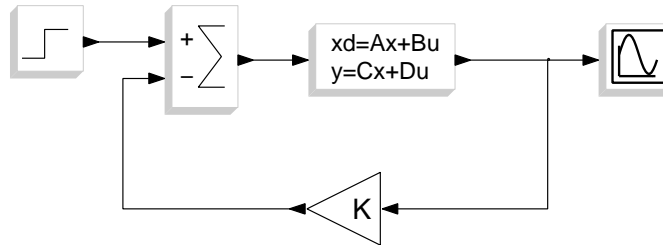


Figura 3.42: Sistema dell'esercizio 3.35

in cui il sistema dinamico vale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

L'ingresso del sistema (segnale gradino) rappresenta il segnale di riferimento  $ref$ . Determinare i valori del vettore di guadagni  $K = [k_1, k_2]$  in modo che la prima uscita del sistema, con l'entrata  $ref$  pari ad un gradino unitario, abbia un comportamento criticamente smorzato con frequenza di  $4rad/s$ . Determinare inoltre il valore finale verso cui tende la risposta della prima uscita.

#### Soluzione:

Il sistema desiderato ha come valori  $\xi = 1$  e  $\omega_n = 4$ . Il denominatore deve valere quindi:

$$s^2 + 2 * \xi * \omega_n * s + \omega_n^2 = s^2 + 8s + 16$$

Analizziamo ora il sistema ad anello chiuso:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$u = ref - K \cdot y = ref - K \cdot C \cdot x$$

Sostituendo  $u$  si trova

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot (ref - K \cdot C \cdot x) = (A - B \cdot K \cdot C) \cdot x + B \cdot ref$$

I poli del nuovo sistema corrispondono agli autovalori della nuova matrice  $A_{new}$

$$A_{new} = (A - B \cdot K \cdot C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice di stato  $A_{new}$  possono essere calcolati da:

$$\det(sI - A_{new}) = 0$$

e quindi

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 + k_1 & s + 1 + k_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Affinché i poli del sistema siano equivalenti a quelli del polinomio desiderato, occorre che il determinante sia uguale a questo polinomio.

Ne consegue che

$$s^2 + s + s \cdot k_1 + 1 + k_2 = s^2 + 8 \cdot s + 16$$

Si trova quindi che  $k_1 = 15$  e  $k_2 = 7$

La nuova matrice di stato  $A_{new}$  vale quindi

$$A_{new} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$$

Trasformando il nuovo sistema da spazio degli stati a funzione di trasferimento si trova

$$G(s) = C \cdot (sI - A_{new})^{-1} \cdot B = \left[ \frac{1}{s^2 + 8s + 16}; \frac{s}{s^2 + 8s + 16} \right]$$

che fornisce il valore verso cui tende la risposta della prima uscita al gradino unitario che è pari a  $1/16$

# Capitolo 4

## Stabilità ed errore allo stato finito

### 4.1 Esercizio

Viene dato il processo rappresentato nella figura 4.1.

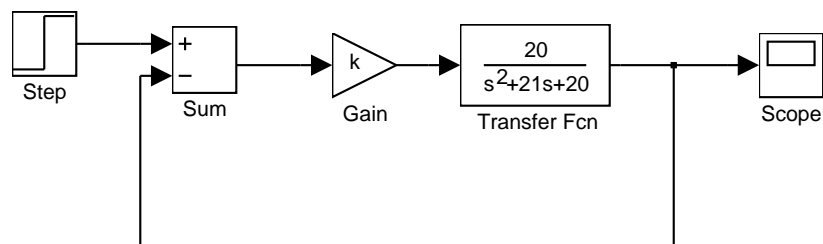


Figura 4.1: Processo dell'esercizio 4.1

Determinare:

1. L'errore allo stato finito per le 3 entrate gradino, rampa e parabola, in funzione del valore  $K$ .
2. Il valore di  $K$  che permette di avere un %OS del 20%.
3. Tempo di setting e errore allo stato finito per le 3 entrate gradino, rampa e parabola per questo valore di  $K$ .

**Soluzione:**

La funzione di trasferimento ad anello aperto vale

$$G(s) = \frac{20K}{s^2 + 21s + 20}$$

Il sistema è di tipo 0.

Conseguentemente

$$K_P = K \rightarrow e_\infty = \frac{1}{1+K}$$

$$K_V = 0 \rightarrow e_\infty = \infty$$

$$K_A = 0 \rightarrow e_\infty = \infty$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{TOT} = \frac{G}{1+G} = \frac{20K}{s^2 + 21s + 20 + 20K}$$

Per avere  $\%OS = 20\%$  occorre un fattore di smorzamento  $\xi = 0.456$ .

Possiamo ora calcolare il valore di  $\omega_n$  da

$$2\xi\omega_n = 21 \rightarrow \omega_n = \frac{21}{2\xi} = 23$$

Possiamo ora determinare il valore di K da

$$20 + 20K = \omega_n^2 = 23^2 \rightarrow K = \frac{23^2 - 20}{20} = 25.51$$

Ora possiamo determinare gli errori allo stato finito per le differenti entrate

$$e_\infty(\text{gradino}) = \frac{1}{1+K} = 0.0377 = 3.77\%$$

$$e_\infty(\text{rampa}) = \infty$$

$$e_\infty(\text{parabola}) = \infty$$

Applicando la formula delle dispense troviamo inoltre

$$T_{setting} = 0.384s$$

## 4.2 Esercizio

Per un sistema con feedback unitario la cui funzione ad anello aperto vale

$$G(s) = K \frac{s + \alpha}{s(s + \beta)}$$

determinare i valori di  $K$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  in modo che l'errore allo stato finito con entrata rampa valga 10% e il sistema ad anello chiuso abbia due poli a

$$-1 \pm j$$

### Soluzione:

Dall'errore di velocità otteniamo

$$K_V = \frac{1}{0.1} = 10 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(s + \alpha)}{s(s + \beta)}$$

otteniamo

$$\frac{K\alpha}{\beta} = 10$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{TOT} = \frac{K(s + \alpha)}{s^2 + (K + \beta)s + K\alpha}$$

Il denominatore della funzione con i poli desiderati vale

$$s^2 + 2s + 2$$

Ora possiamo paragonare i coefficienti e costruire un sistema per le 3 incognite

Da

$$K\alpha = 2$$

e dall'errore troviamo



$$10\beta = K\alpha = 2 \rightarrow \beta = 0.2$$

Di seguito otteniamo

$$K = 2 - \beta = 1.8$$

e

$$\alpha = \frac{2}{K} = \frac{10}{9}$$

### 4.3 Esercizio

Un sistema di 2. ordine messo in un circuito closed loop con feedback unitario segue un segnale rampa in entrata con un errore pari all'1% del segnale applicato; la frequenza naturale di questo sistema vale 10rad/s.

Determinare

1. Il tipo del sistema ad anello aperto
2. La funzione di trasferimento ad anello aperto di questo sistema
3. Il fattore di smorzamento  $\xi$  del sistema ad anello chiuso

**Soluzione:** Siccome c'è un errore finito con entrata rampa il sistema ad anello aperto è di tipo 1. La funzione d anello aperto vale quindi

$$G(s) = \frac{G}{s \cdot (s + a)}$$

Dall'errore allo stato finito con entrata rampa si ottiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \frac{K}{s+a}} = 0.01$$

si ottiene il la relazione

$$\frac{K}{a} = 100$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{tot}(s) = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

Conoscendo la frequenza naturale del sistema si può trovare

$$K = \omega_n^2 = 100$$

e quindi

$$a = 1$$

Dalla funzione di rasferimento si ottiene poi

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = a = 1 \rightarrow \xi = 0.05$$

## 4.4 Esercizio

Un sistema ha una funzione di trasferimento ad anello aperto pari a

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \alpha)}$$

e viene utilizzato in feedback unitario.

Determinare  $K$  e  $\alpha$  in modo che il sistema abbia una costante di velocità  $K_V$  pari a 100 e un %OS del 20%.

**Soluzione:**

Il sistema è di tipo 1

Conseguentemente

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{\alpha} = 100$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{TOT} = \frac{G}{1 + G} = \frac{K}{s^2 + \alpha s + K}$$

Per avere un %OS = 20% occorre un valore del fattore di smorzamento  $\xi = 0.456$ .

Analizzando il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso possiamo quindi costruire il sistema seguente:

$$\frac{K}{\alpha} = 100$$

$$\omega_n = \sqrt{K}$$

$$2\xi\omega_n = 2 \cdot 0.456 \cdot \sqrt{K} = \alpha = \frac{K}{100}$$

Dall'ultima equazione si ottiene

$$\sqrt{K} = 2 \cdot 0.456 \cdot 100 = 91.2 \rightarrow K = 8317.44$$

e conseguentemente

$$\alpha = \frac{K}{100} = 83.17$$

## 4.5 Sistemi

Per i sistemi seguenti determinare se sono asintoticamente stabili, stabili o instabili.

### 4.5.1 Sistema 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

### 4.5.2 Sistema 2

$$\frac{s-1}{12+4s+3s^2+s^3}$$

### 4.5.3 Sistema 3

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0.6 & 0.5 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \ 0 \ 0]x$$

### 4.5.4 Sistema 4

$$\frac{z-1}{z^3-0.5z^2}$$

### 4.5.5 Sistema 5

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -1.25 & -2.25 \\ -0.25 & -1.25 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [1 \ 0]x_k$$

**Soluzione:** L'analisi di stabilità può essere fatta analizzando semplicemente i poli della funzione di trasferimento o gli autovalori della matrice di stato A.

Sistema 1: sistema continuo con poli a  $0, 0, -3 \rightarrow 2$  poli all'origine, sistema instabile

Sistema 2: sistema continuo con poli a  $-3, -2i, 2i \rightarrow 2$  poli con parte reale nulla, sistema stabile

Sistema 3: sistema continuo con poli a  $-1, -1, 2 \rightarrow 1$  polo nel semipiano destro, sistema instabile

Sistema 4: sistema discreto con poli a  $0, 0, 0.5 \rightarrow$  tutti i poli nel cerchio unitario, sistema asintoticamente stabile

Sistema 5: sistema discreto con poli a  $-2, -0.5 \rightarrow$  un polo fuori dal cerchio unitario, sistema instabile





# Capitolo 5

## Analisi con il luogo delle radici

### 5.1 Esercizio

Consideriamo il processo descritto dalla funzione

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

utilizzato in feedback unitario.

Si desidera avere un errore massimo con entrata rampa pari a 0.2 e un %OS massimo riferito ad un ingresso gradino del 15%.

Eeguire i passi seguenti

1. Supponiamo di voler correggere il processo con un preamplificatore in entrata di guadagno  $K$ . Determinare il valore di  $K$  che permette di ottenere l'errore desiderato. Determinare la funzione di trasferimento ad anello chiuso e stimare il %OS ottenuto. Il problema è risolto?
2. Supponiamo di utilizzare una funzione di trasferimento  $K(s) = \frac{s+a}{s+b}$  in serie al processo. Determinare il rapporto  $a/b$  che permette di ottenere l'errore desiderato.
3. Utilizziamo  $a = 0.1$  e determiniamo dal risultato precedente il valore di  $b$ . Determinare la funzione di trasferimento ad anello chiuso. Schizzare il luogo delle radici del sistema. Con  $K=1$  determinare i poli ad anello chiuso e stimare il %OS. Si ottiene il risultato sperato?

### Soluzione:

Dall'errore ricavo che la costante di errore di velocità vale 5.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+2)} = 5 \rightarrow K \geq 10$$

Dal %OS ricavo

$$\%OS = 15\% \rightarrow \xi = 0.517$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso con  $K = 10$  vale

$$G_{TOT} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

con

$$\omega_n = \sqrt{10}$$

e

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.316 \rightarrow \%OS = 35.1\%$$

Chiaramente non risolviamo il problema.

Qui riporto ora una possibile soluzione del resto del problema. L'altra soluzione prevede di considerare  $K=1$ .

Dalla funzione ad anello chiuso

$$G_{TOT} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

vediamo che

$$2\xi\omega_n = 2 * 0.517 * \omega_n = 2 \rightarrow \omega_n = 1.934$$

e quindi

$$K = \omega_n^2 = 3.74$$

Il rapporto  $a/b$  che permette di soddisfare l'errore cercato vale

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{3.74} = 2.673$$

La funzione di trasferimento globale del sistema risulta essere

$$G_{TOT} = \frac{3.74 \frac{s+0.1}{s+0.037} \frac{1}{s(s+2)}}{1 + 3.74 \frac{s+0.1}{s+0.037} \frac{1}{s(s+2)}} =$$

I poli del sistema ad anello chiuso valgono  $-0.103$ ,  $-0.967 \pm 1.64i$ .



# Capitolo 6

## Analisi di Bode

### 6.1 Esercizio

Viene dato un processo con funzione di trasferimento pari a

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)}$$

Lavorando anche con il diagramma di Bode (fig 6.1 (K=1)) determinare i valori di K che permettono di ottenere:

- Costante di errore di velocità  $K_V \geq 2$
- $PM = 40^\circ$

È possibile soddisfare contemporaneamente le due specifiche e per quali valori di K?

**Soluzione:**

Calcoliamo innanzitutto il valore di K che rispetta le specifiche di errore.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(s+2)(s+5)} = 2 \rightarrow K \geq 20$$

Dal grafico della fase leggo il valore del guadagno in corrispondenza del punto in cui la fase vale  $-40^\circ$ , valore che stimo a ca.  $-25dB$  che significa un'amplificazione massima di

$$10^{\frac{25}{20}} = 17.78$$

I due risultati ottenuti sono incompatibili tra di loro e di conseguenza non posso rispettare le specifiche imposte con un regolatore puramente proporzionale.

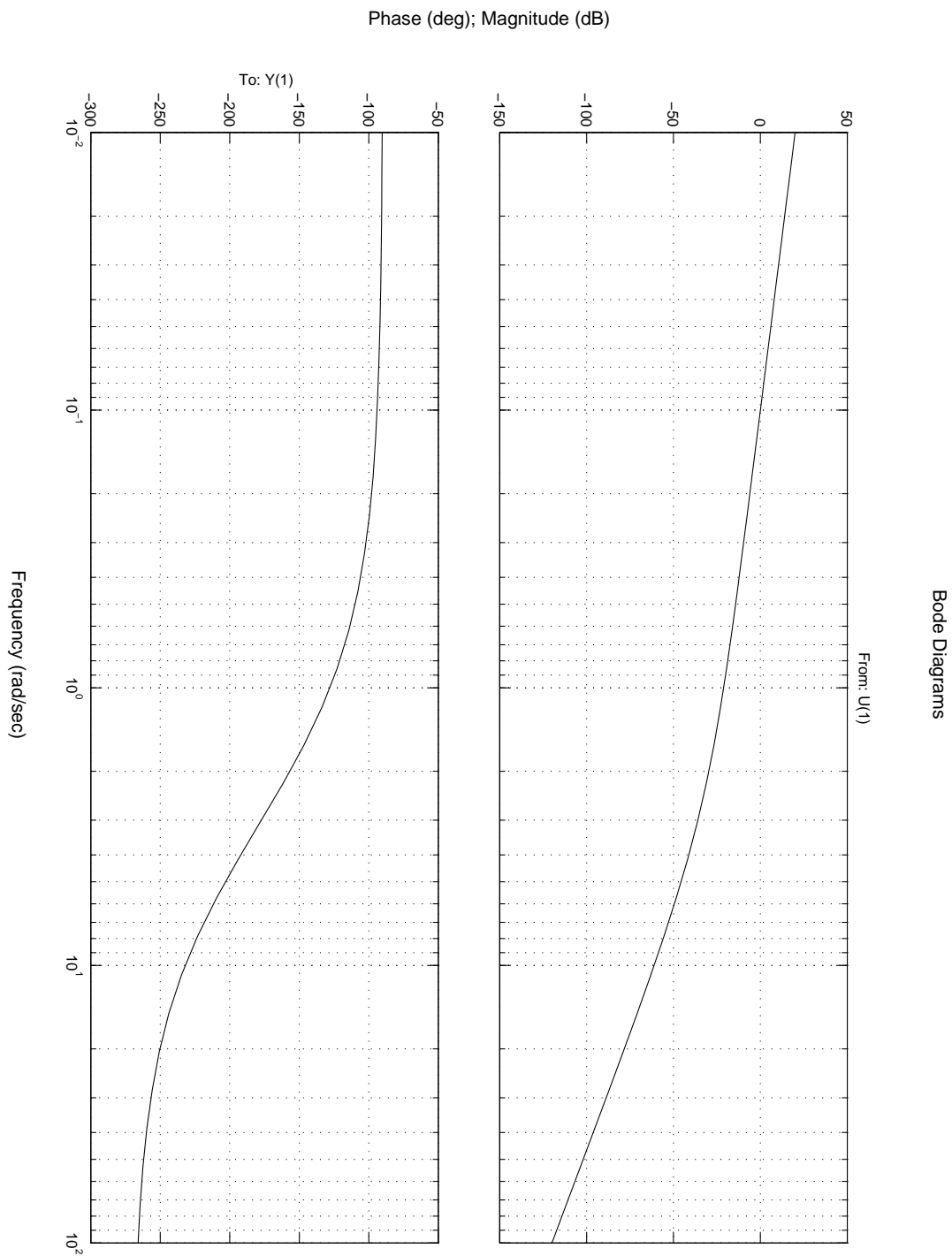


Figura 6.1: Diagramma di bode dell'esercizio 6.1

## 6.2 Esercizio

Viene dato un processo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

Le specifiche di progetto sono le seguenti

- $e_{inf}$  con entrata gradino  $\leq 0.1\%$
- $\%OS \leq 10\%$
- $T_{setting} \leq 5sec$

Determinare:

1. l'amplificazione K necessaria per soddisfare l'errore allo stato finito del sistema ad anello chiuso con feedback unitario.
2. Le caratteristiche dinamiche del sistema ad anello chiuso con questo fattore di amplificazione
3. Il fattore di smorzamento e il margine di fase associati al  $\%OS$  richiesto
4. Il fattore di amplificazione massimo che permette di soddisfare le specifiche dinamiche.
5. I poli dominanti sul diagramma del luogo delle radici che soddisfano il fattore di smorzamento richiesto.
6. Il settore del luogo delle radici che soddisfa le specifiche dinamiche per i poli dominanti
7. Il margine di fase e il margine di guadagno del sistema  $K * G(s)$

### Soluzione:

Per ottenere l'errore desiderato K vale

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{5K}{(s+1)(s+5)}} \leq 0.001 \rightarrow K \geq 999$$

Con questo K la funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{TOT} = \frac{4995}{s^2 + 6s + 5000}$$

Il fattore di smorzamento relativo a questa funzione può essere calcolato da

$$\omega_n = \sqrt{5000} \rightarrow 2\xi\omega_n = 2\xi\sqrt{5000} = 6 \rightarrow \xi = 0.0424$$

cui corrisponde un %OS pari a 87.5%.

Per avere il %OS desiderato occorre avere  $\xi \geq 0.59$  a cui corrisponde un  $PM \geq 60^\circ$

La  $G_{TOT}$  generica vale

$$G_{TOT} \leq \frac{5K}{s^2 + 6s + 5 + 5K}$$

Con  $\xi = 0.6$  al denominatore di  $G_{TOT}$  avremmo

$$2\xi\omega_n s = 6s \rightarrow \omega_n = \frac{6}{2\xi} = 5$$

e quindi

$$5 + 5K = \omega_n^2 = 25 \rightarrow K = 4$$

I poli dominanti del sistema di 2. ordine che rispetta le specifiche si trovano dalle formule ricavando da  $\xi = 0.6$  e  $T_{setting} = 5s$

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-0.6^2})}{0.6 * 5} = 1.38$$

ottenendo

$$s_{1,2} = -0.825 \pm 1.13j$$

Il settore del luogo delle radici che soddisfa le specifiche dinamiche è quello all'interno delle due diagonali che dall'origine passano per i due poli dominanti, e dalla retta verticale per passa per questi poli.

Con il  $K = 4$  trovato precedentemente possiamo andare a vedere il PM e il GM sul diagramma di Bode.



Utilizzando la funzioni “bd\_m” determino  $\omega_{gc} = 3.21 \text{ rad/s}$  cui corrisponde una fase di  $-105^\circ$  e  $PM = 75^\circ$ .

La differenza rispetto a quanto prevediamo è dovuta all'imprecisione delle formule con K piccolo.

Il margine di guadagno è infinito poiché la fase non scende mai sotto i  $-180^\circ$ .

### 6.3 Analisi di Bode

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 6.2. La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 10 \cdot s}$$

Viene dato anche il diagramma di Bode della funzione  $G(s)$  (figura 6.3), con  $K = 1$ .

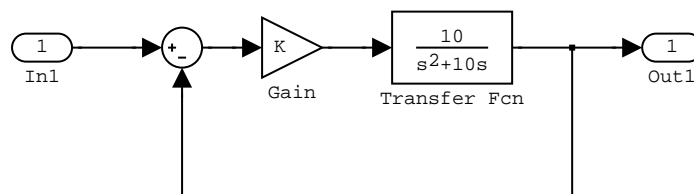


Figura 6.2: Sistema dell'esercizio 6.3

Determinare

1. Il valore di  $K$  che permette di avere un errore allo stato finito con entrata rampa pari a 1%.
2. Con questo valore di  $K$  stimare **dal diagramma di Bode**
  - (a) Il valore di  $\%OS$  con entrata gradino.
  - (b) Il valore del tempo di setting  $T_s$  con entrata gradino.

**Attenzione: i dati vanno trovati senza passare dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso.**

**Soluzione:** La specifica di errore richiede un valore di  $K_V$  (costante di velocità) pari a 100

Di conseguenza

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K \cdot G(s) = 100 = \frac{10 \cdot K}{10} = 100 \rightarrow K = 100$$

Il diagramma di Bode viene quindi traslato verso l'alto di

$$20 \log_{10} 100 = 40dB$$

Basta quindi ritracciare la riga di  $0dB$  in corrispondenza degli attuali  $-40dB$

Sul diagramma di Bode si possono ora leggere le due informazioni di  $PM = 18^\circ$  a  $30.8 \text{ rad/s}$ .

Possiamo quindi stimare che

$$PM = 18^\circ \rightarrow \xi = 0.16 \rightarrow \%OS = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 60.8\%$$

Possiamo anche stimare che

$$\omega_n \simeq \omega_{gc} = 30.8$$

e quindi il tempo di setting vale

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} = 0.8145 \text{ s}$$

## 6.4 Analisi di Bode

Viene dato il sistema rappresentato nella figura 6.4. La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 5 \cdot s}$$

Viene dato anche il diagramma di Bode della funzione  $G(s)$  (figura 6.5), con  $K = 1$ . Determinare

1. Il valore di  $K$  che permette di avere un errore allo stato finito con entrata rampa pari a 1%.
2. Con questo valore di  $K$  stimare **dal diagramma di Bode**
  - (a) Il valore di %OS con entrata gradino.
  - (b) Il valore del tempo di setting  $T_s$  con entrata gradino.

**Attenzione: i dati vanno trovati senza passare dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso.**

**Soluzione:** La specifica di errore richiede un valore di  $K_V$  (costante di velocità) pari a 100

Di conseguenza

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K \cdot G(s) = 100 = \frac{5 \cdot K}{5} = 100 \rightarrow K = 100$$

Il diagramma di Bode viene quindi traslato verso l'alto di

$$20 \log_{10} 100 = 40dB$$

Basta quindi ritracciare la riga di  $0dB$  in corrispondenza degli attuali  $-40dB$

Sul diagramma di Bode si possono ora leggere le due informazioni di  $PM = 13^\circ$  a  $22rad/s$ .

Possiamo quindi stimare che

$$PM = 13^\circ \rightarrow \xi = 0.1132 \rightarrow \%OS = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 69.9\%$$

Possiamo anche stimare che

$$\omega_n \simeq \omega_{gc} = 22$$

e quindi il tempo di setting vale

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} = 1.57s$$

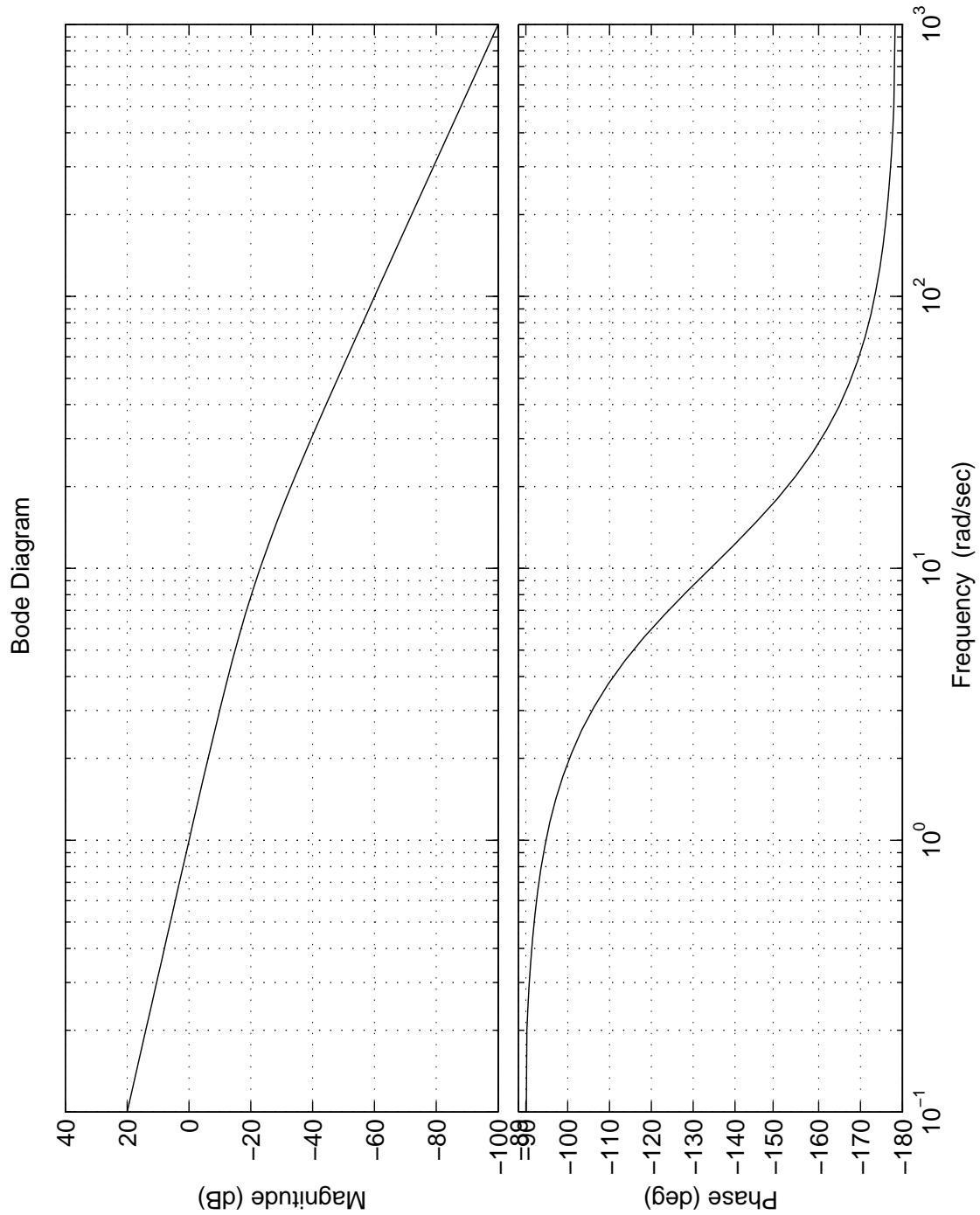


Figura 6.3: Diagramma di Bode del sistema dell'esercizio 6.3

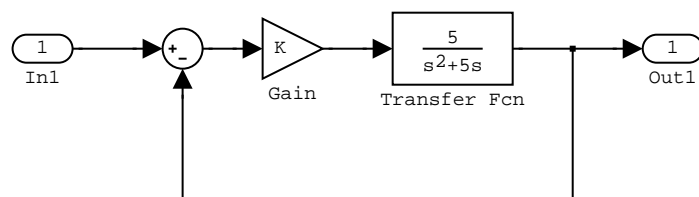


Figura 6.4: Sistema dell'esercizio 6.4

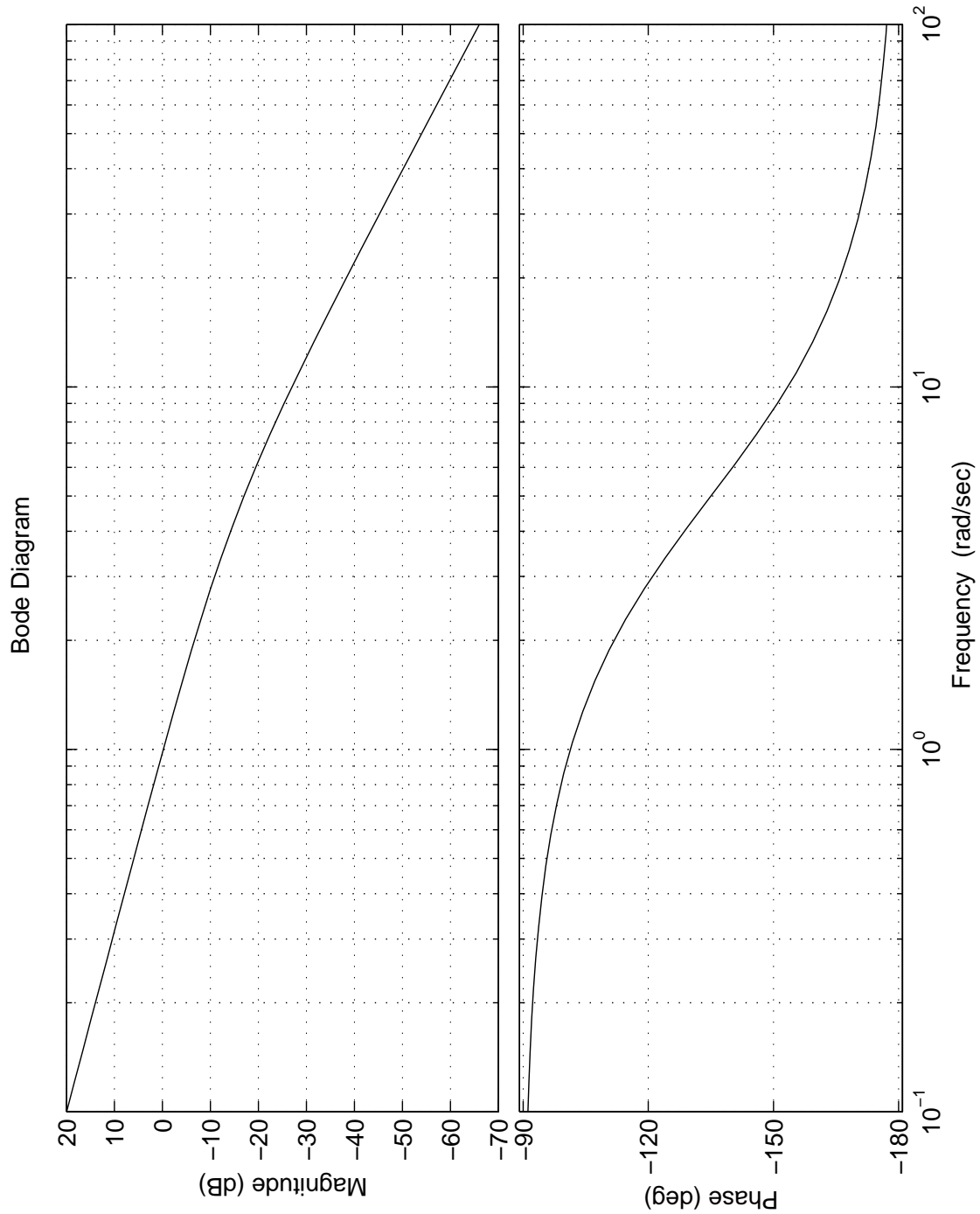


Figura 6.5: Diagramma di Bode del sistema dell'esercizio 6.4



# Capitolo 7

## Controllori

### 7.1 Esercizio

Un sistema con feedback unitario ha la funzione di trasferimento pari a

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)}$$

e lavora momentaneamente con  $\%OS = 15\%$  e un  $T_{setting} = 2s$ .

Costruire un regolatore “PI” che annulli l’errore statico e mantenga inalterate le caratteristiche dinamiche del sistema ( $\omega_{gc}$  e  $PM$ ).

Il diagramma di Bode del sistema con  $K = 1$  è rappresentato nella figura 7.1.

#### Soluzione:

I  $\%OS$  e  $T_{setting}$  dati equivalgono ad un sistema con

$$G_{TOT} = \frac{K}{s^2 + 4s + K} \rightarrow \xi = 0.517, \omega_n = 3.93$$

$$K = \omega_n^2 = 15.48$$

A  $\xi = 0.517$  corrisponde  $PM \simeq 53^\circ$ . Dal grafico vediamo che ad una fase di ca.  $-127^\circ$  corrisponde  $\omega_{gc} = 3.34$  da cui otteniamo

$$T_I = \frac{10}{\omega_{gc}} = 3.34$$

Il regolatore “PI” diventa quindi

$$G_{PI} = K_P \frac{1 + 3.34s}{3.34s}$$

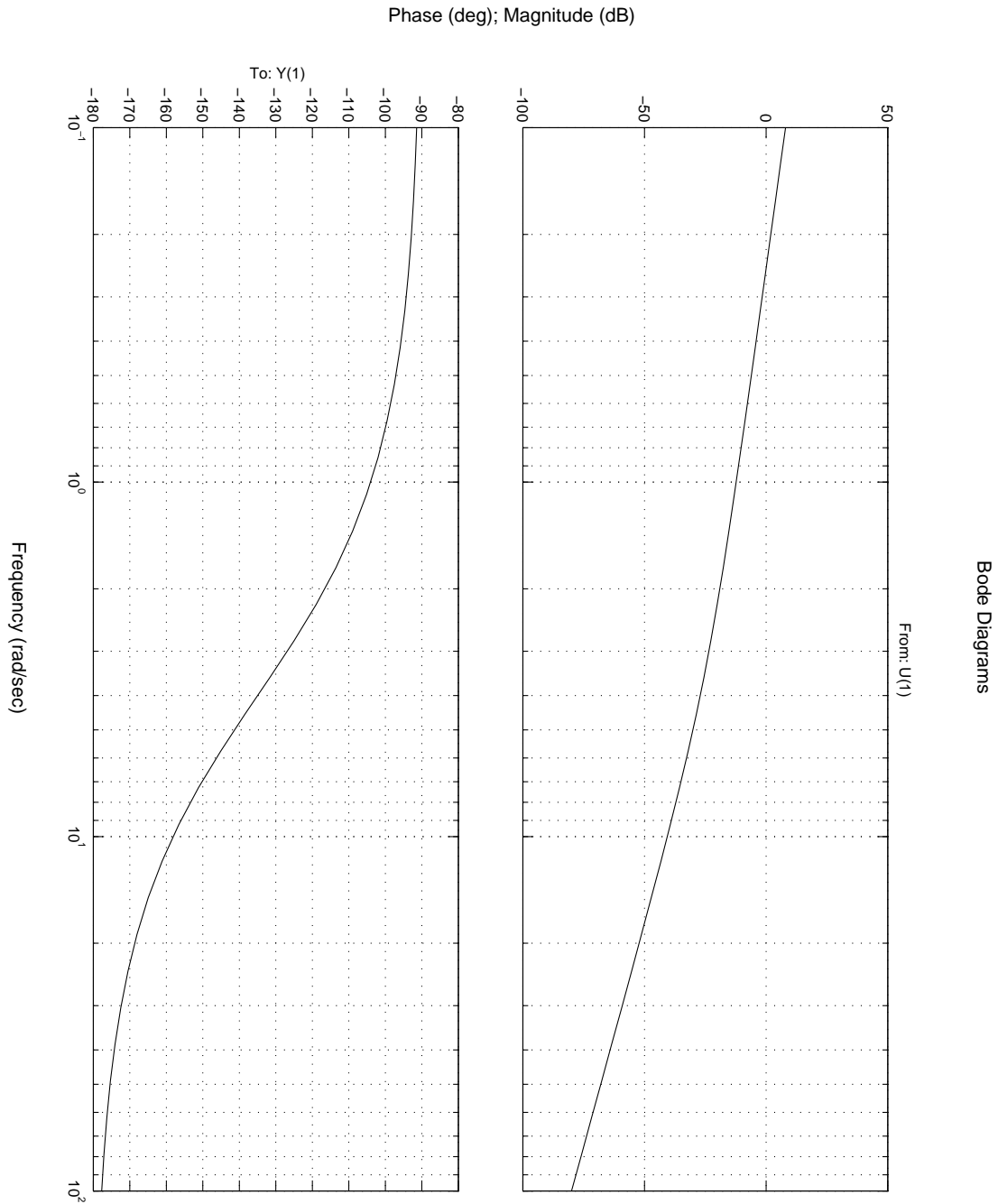


Figura 7.1: Diagramma di bode dell'esercizio 7.1

Dal grafico  $G_{PI}G$  vediamo che abbiamo il  $PM$  desiderato a ca.  $2.26rad/s$  con un guadagno in quel punto di  $-20.23dB$  da compensare tramite il valore di  $K_P$ .

$$K_P = 10^{\frac{20.23}{20}} = 10.27$$

Il regolatore cercato vale quindi

$$10.27 \frac{1 + 3.34s}{3.34s}$$

## 7.2 Esercizio

Un sistema con feedback unitario ha la funzione di trasferimento pari a

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+8)}$$

e lavora momentaneamente con  $\%OS = 20\%$ .

Costruire un regolatore “PD” che migliori di un fattore 5 l’errore statico e mantenga inalterato il PM del sistema.

Il diagramma di Bode del sistema con  $K = 1$  è rappresentato nella figura 7.2.

### Soluzione:

Al  $\%OS$  dato corrisponde  $\xi = 0.456$  e, dal grafico,  $PM = 48^\circ$ .

Dal grafico di  $G(s)$  andiamo a determinare il guadagno in corrispondenza del  $PM$  desiderato e troviamo ca.  $-40dB$  che corrispondono ad un’amplificazione necessaria per portare questo punto a  $0dB$  di  $K = 100$ .

Per migliorare di un fattore 5 l’errore dobbiamo dare  $K$  cinque volte più grande, cioè  $K = 500$ , cui corrispondono  $54dB$ .

Con questo valore di  $K$  otteniamo che la nuova  $\omega_{gc}$  vale  $6.21rad/s$ , e in questo punto il  $PM$  è di ca.  $1^\circ$ .

Dobbiamo quindi fornire almeno  $47^\circ$  supplementari tramite il regolatore “PD”.

Dal grafico del PD normato (ottenibile anche sulla calcolatrice con

$$bd\_f(1 + s, x) + 360$$

otteniamo

$$\omega_{\Delta PM} = 1.0724$$

Quindi

$$T_D = \frac{\omega_{\Delta PM}}{\omega_{gc}} = 0.173$$

Il regolatore PD cercato vale quindi

$$G_{PD} = 500(1 + 0.173s)$$

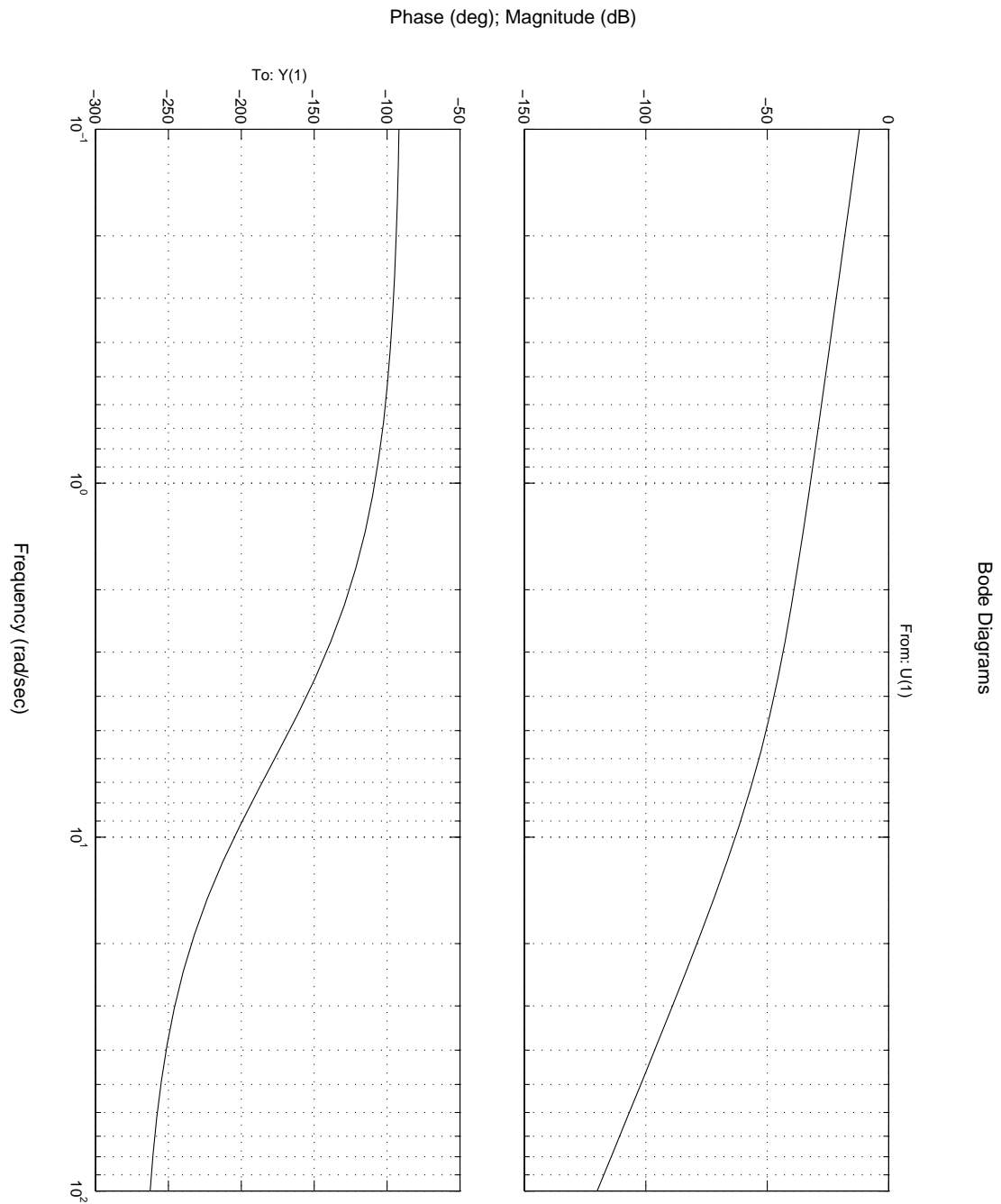


Figura 7.2: Diagramma di bode dell'esercizio 7.2

### 7.3 Esercizio

Viene data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

utilizzata in feedback unitario, e le specifiche seguenti

$$e_{\infty} < 5\%(\text{gradino})$$

$$\%OS < 8\%$$

$$T_{setting} < 1s$$

1. Valori generali:

- Determinare Il valore di  $K$  che permette di rispettare l'errore dato. Arrotondate questo valore alla potenza di 10 superiore più vicina (p.es. se 9 si arrotonda a 10, se 8000 si arrotonda a 10000 ecc.).
- Determinate il fattore di smorzamento  $\xi$  per il  $\%OS$  dato.
- Determinate la frequenza naturale  $\omega_n$  necessaria al  $T_{setting}$  dato.
- I poli dominanti del sistema di 2. ordine.

2. Analisi con il luogo delle radici:

- Disegnare il diagramma del luogo delle radici per il sistema dato.
- Determinate la posizione dei poli che rispettano le specifiche di  $\%OS$  e il valore di  $K$  necessario ad ottenere questi poli nel sistema ad anello chiuso.
- Con questo valore di  $K$  determinare il  $T_{setting}$  e l'errore allo stato finito.
- Vengono rispettate le specifiche?

3. Analisi di Bode (utilizzate il diagramma di Bode (figura7.3) dato per  $K = 1$ ).

- Determinate il  $PM$  che rispetta le specifiche di  $\%OS$  date.
- Determinate un regolatore "PI" che permette di rispettare il  $PM$  e l'errore dati nelle specifiche.
- Determinate approssimativamente il  $T_{setting}$  del sistema con compensatore "lag" e confrontate questo risultato con le specifiche richieste.
- Costruite un regolatore "PD" che rispetta tutte le specifiche.

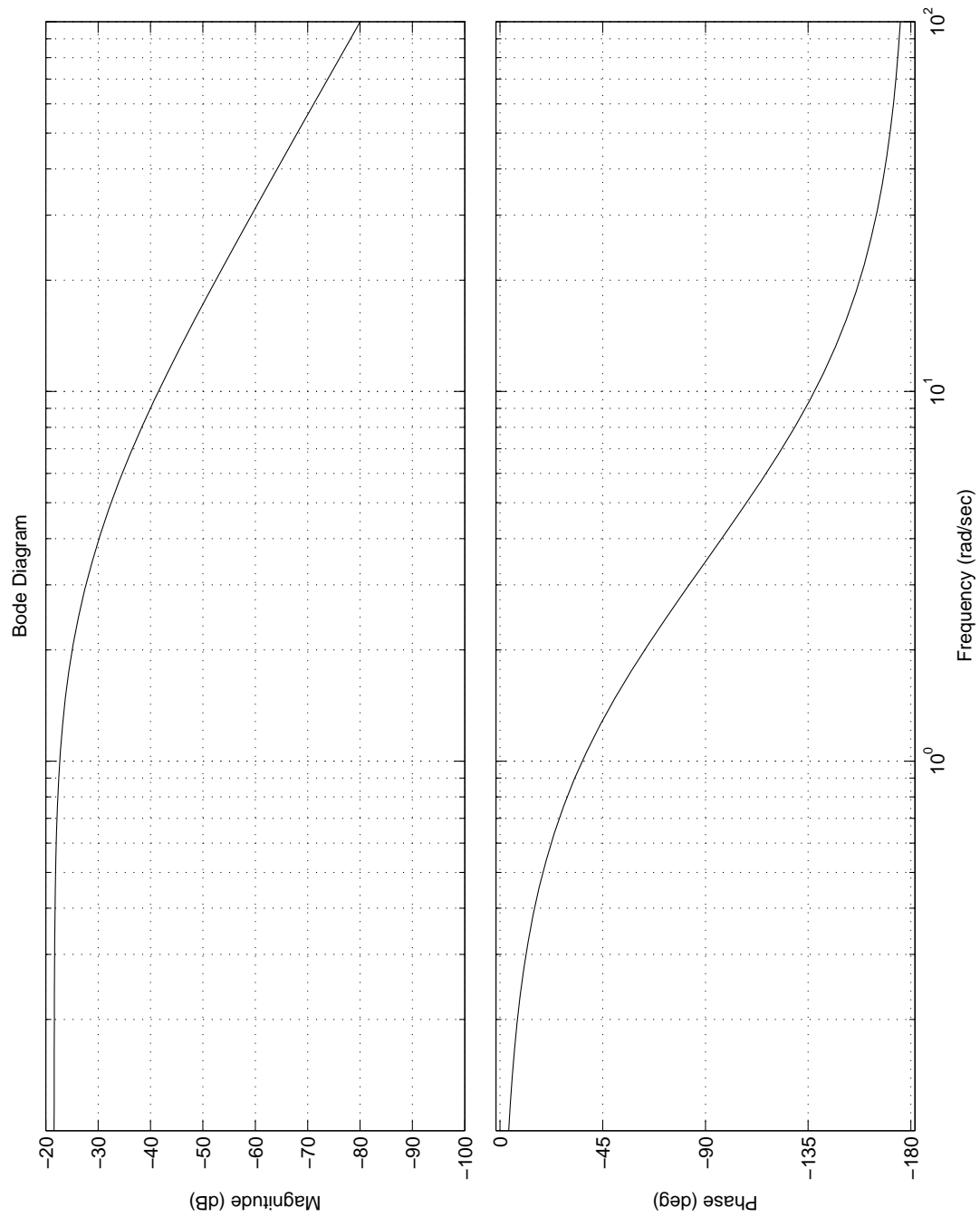


Figura 7.3: Diagramma di bode dell'esercizio 7.3

Per la determinazione dei regolatori utilizzate una fase supplementare di  $5^\circ$ .

**Soluzione:**

Cerchiamo il valore di  $K$  dall'analisi di  $e_\infty$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{(s+1)(s+5)}} 0.05 \rightarrow K = 95$$

Arrotondiamo quindi  $K$  a 100.

Con le formule determiniamo  $\xi = 0.63$  e  $\omega_n = 6.64$ .

I poli dominanti del sistema risultano

$$s_{1,2} = -4.16 \pm 5.176j$$

Il luogo delle radici del sistema con il %OS dato è rappresentato nella figura 7.4.

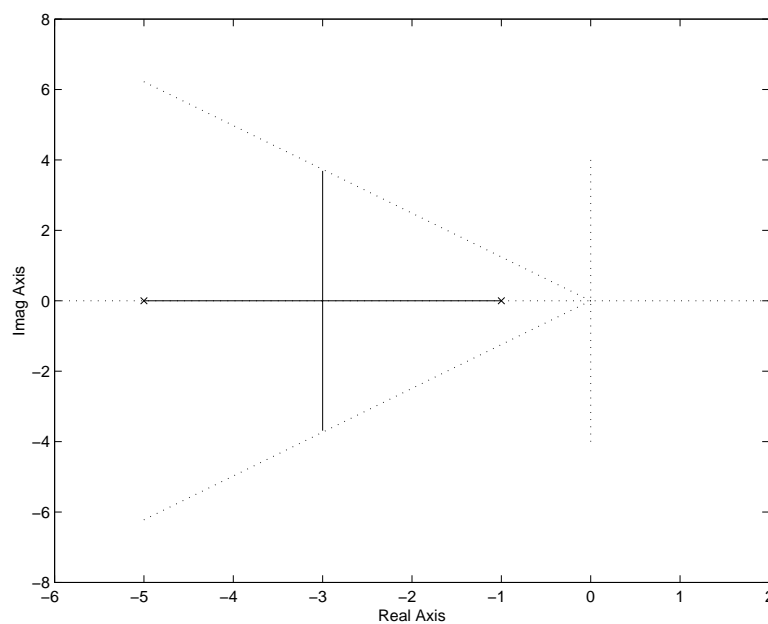


Figura 7.4: Luogo delle radici dell'esercizio 7.3

La funzione di trasferimento generica ad anello chiuso vale

$$G_{TOT} = \frac{K}{s^2 + 6s + 5 + K}$$



e quindi

$$2\xi\omega_n s = 6s \rightarrow \omega_n = \frac{3}{\xi} = 4.788$$

conseguentemente

$$5 + K = \omega_n^2 \rightarrow K = 17.92$$

Dalla formula

$$T_{setting} = \frac{-\ln(0.002\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} \rightarrow T_{setting} = 1.387$$

L'errore allo stato finito con questo K vale

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{(s+1)(s+5)}} = 0.218$$

Non vengono rispettate le specifiche di errore richieste.

Analizziamo ora il regolatore PI. Il PM necessario per il %OS dato vale ca.  $60^\circ$

Con un regolatore "PI" l'errore viene rispettato grazie all'aumento del tipo del sistema ad anello aperto.

Il PM richiesto l'abbiamo a ca. 4 rad/s. Conseguentemente possiamo fissare

$$T_I = 10/4 = 2.5s$$

Abbiamo i nostri  $65^\circ$  di PM alla frequenza di 3.5 rad/s e per portare questo punto a diventare la nuova  $\omega_{gc}$  dobbiamo alzare il grafico dell'ampiezza di ca. 27dB pari a

$$K = 10^{\frac{27}{20}} = 22.4$$

Con le formule possiamo ora determinare

$$T_{setting} = 1.89s$$

Per determinare il controllore “PD” disegniamo dapprima il diagramma di bode del sistema con la compensazione proporzionale  $K = 100$ .

Possiamo subito vedere il punto critico del PM che vale  $PM = 34.2^\circ$  a  $9.366rad/s$

La  $\omega_{gc}$  rispetta le specifiche di  $T_{setting}$  imposte.

Occorre quindi fornire un supplemento di ca.  $36^\circ$ .

Dal grafico del PD normato possiamo determinare

$$\omega_{\Delta PM} = 0.75$$

Di conseguenza

$$T_D = \frac{\omega_{\Delta PM}}{\omega_{gc}} = 0.08$$

Il regolatore “PD” risulta quindi essere

$$G_{PD} = 100(1 + 0.08s)$$

Il margine di fase risulta alla fine essere di  $71^\circ$  ad una frequenza di  $11rad/s$

## 7.4 Esercizio

Viene dato il sistema della figura 7.5.

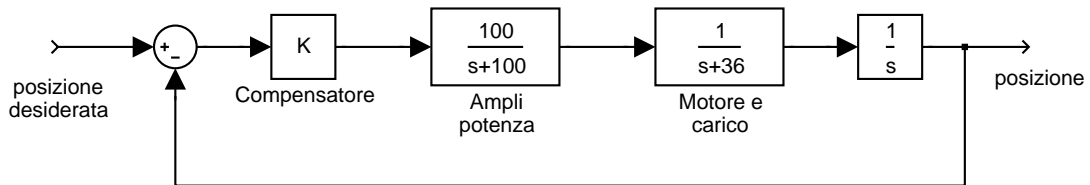


Figura 7.5: Schema dell'esercizio 7.4

- Costruire un controllore "PI" che permetta di ottenere un  $\%OS = 9.48$  con entrata gradino e un errore nullo con entrata rampa.
- Costruire un regolatore PD che permetta di ottenere  $\%OS = 20\%$  e  $K_V = 40$ .

Utilizzate il diagramma di Bode ( $K = 1$ ) della figura 7.6.

**Soluzione:**

### 7.4.1 Regolatore "PI"

Al  $\%OS = 9.48$  corrisponde  $\xi = 0.517$  e quindi  $PM \simeq 60^\circ$ . Dal grafico vediamo che ad una fase di ca.  $120^\circ$  corrisponde  $\omega_{gc} = 14.4 \text{ rad/s}$  da cui otteniamo

$$T_I = \frac{10}{\omega_{gc}} = 0.7$$

Il regolatore "PI" diventa quindi

$$G_{PI} = K_P \frac{1 + 0.7s}{0.7s}$$

Dal grafico  $G_{PI}G$  vediamo che abbiamo il  $PM$  desiderato a ca.  $10.5 \text{ rad/s}$  con un guadagno in quel punto di  $-51.87 \text{ dB}$  da compensare tramite il valore di  $K_P$ .

$$K_P = 10^{\frac{51.87}{20}} = 392.24$$

Il regolatore cercato vale quindi

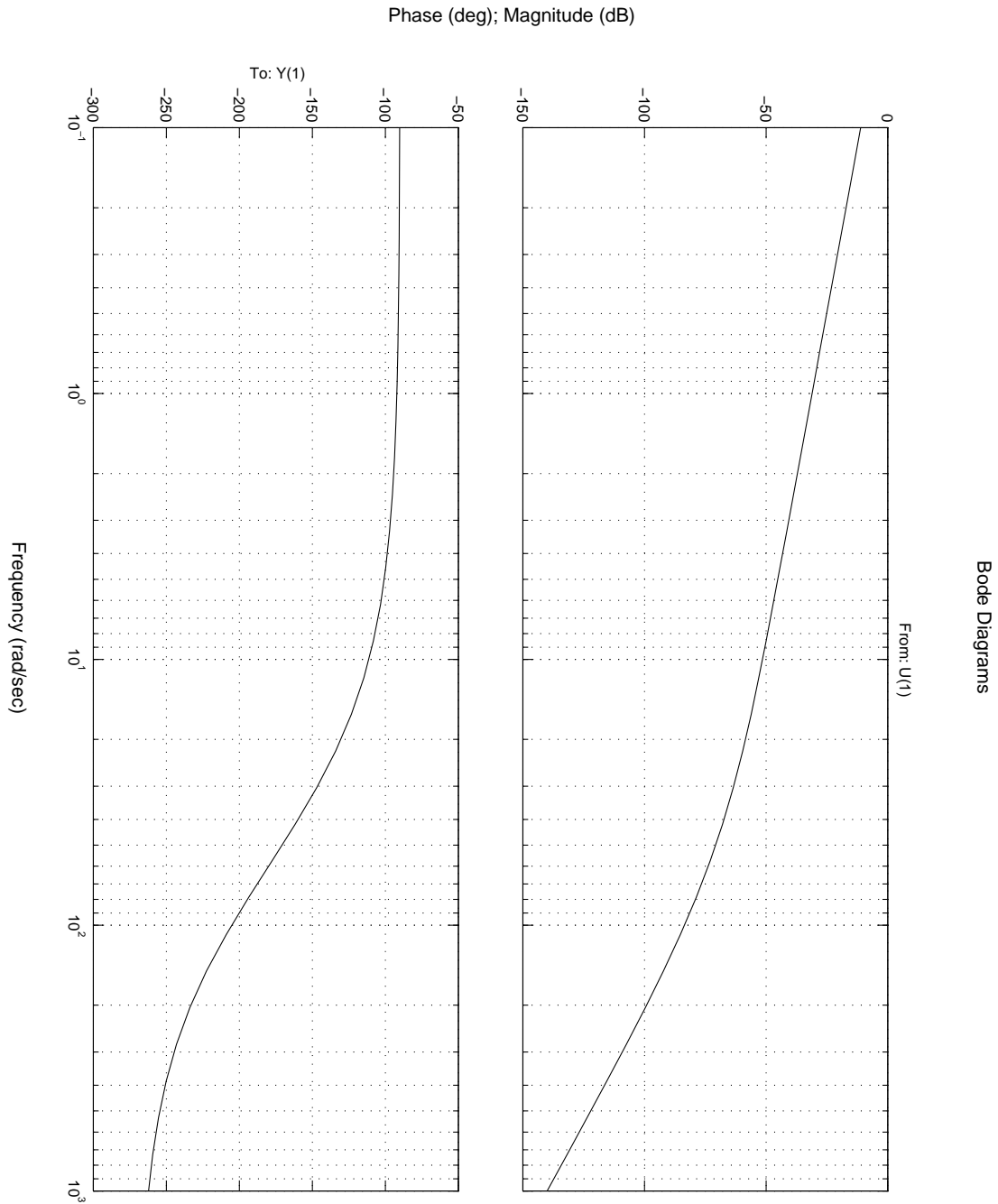


Figura 7.6: Diagramma di bode dell'esercizio 7.4

$$392.94 \frac{1 + 0.7s}{0.7s}$$

### 7.4.2 Regolatore “PD”

Da  $K_V = 40$  possiamo determinare

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 40 = \frac{K}{36} \rightarrow K = 1440$$

Questo guadagno equivale a  $63.17dB$  che sul grafico troviamo alla frequenza di  $29.62rad/s$  dove  $PM = 34^\circ$ .

Al %OS dato corrisponde  $\xi = 0.456$  e, dal grafico,  $PM \simeq 50^\circ$ . Dobbiamo quindi fornire con il “PD” una fase supplementare di ca.  $16^\circ$ .

Dal grafico del PD normato (ottenibile anche sulla calcolatrice con

$$bd_{-f}(1 + s, x) + 360$$

otteniamo

$$\omega_{\Delta PM} = 0.287$$

Quindi

$$T_D = \frac{\omega_{\Delta PM}}{\omega_{gc}} = 0.0097$$

Il regolatore PD cercato vale quindi

$$G_{PD} = 1440(1 + 0.0097s)$$

## 7.5 Esercizio

Un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

in feedback unitario deve essere regolato tramite una combinazione di un regolatore *PI* e di un regolatore *lead*, in modo da poter avere un margine di fase  $PM \geq 90^\circ$  ad una frequenza di gain crossover  $\omega_{gc} = 4 \text{ rad/s}$ .

Il regolatore *PI* viene implementato con la funzione di trasferimento

$$G_{pi}(s) = \frac{1+2s}{2s}$$

Utilizzando il diagramma di Bode allegato (Figura 7.7), che mostra il sistema  $G_{pi}(s) \cdot G(s)$ , realizzare la parte del regolatore *lead* in modo da soddisfare le specifiche.

**Soluzione:** Il diagramma di bode del sistema con compensatore *PI* mostra a 4 rad/s le caratteristiche seguenti:

$$PM = 64.44^\circ$$

$$Gain = -27.99 \text{ dB}$$

Per arrivare a  $90^\circ$  di PM devo aggiungere mediante il controllore lead

$$\Delta PM = 90 - 64.44 = 25.56^\circ$$

Conseguentemente

$$\alpha = \frac{1 + \sin(25.56)}{1 - \sin(25.56)} = 2.52$$

Questo controllore fornisce

$$10 * \log_{10}(\alpha) = 4.01 \text{ dB}$$

Il valore di  $T$  del controllore lead vale

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot 4} = 0.157$$

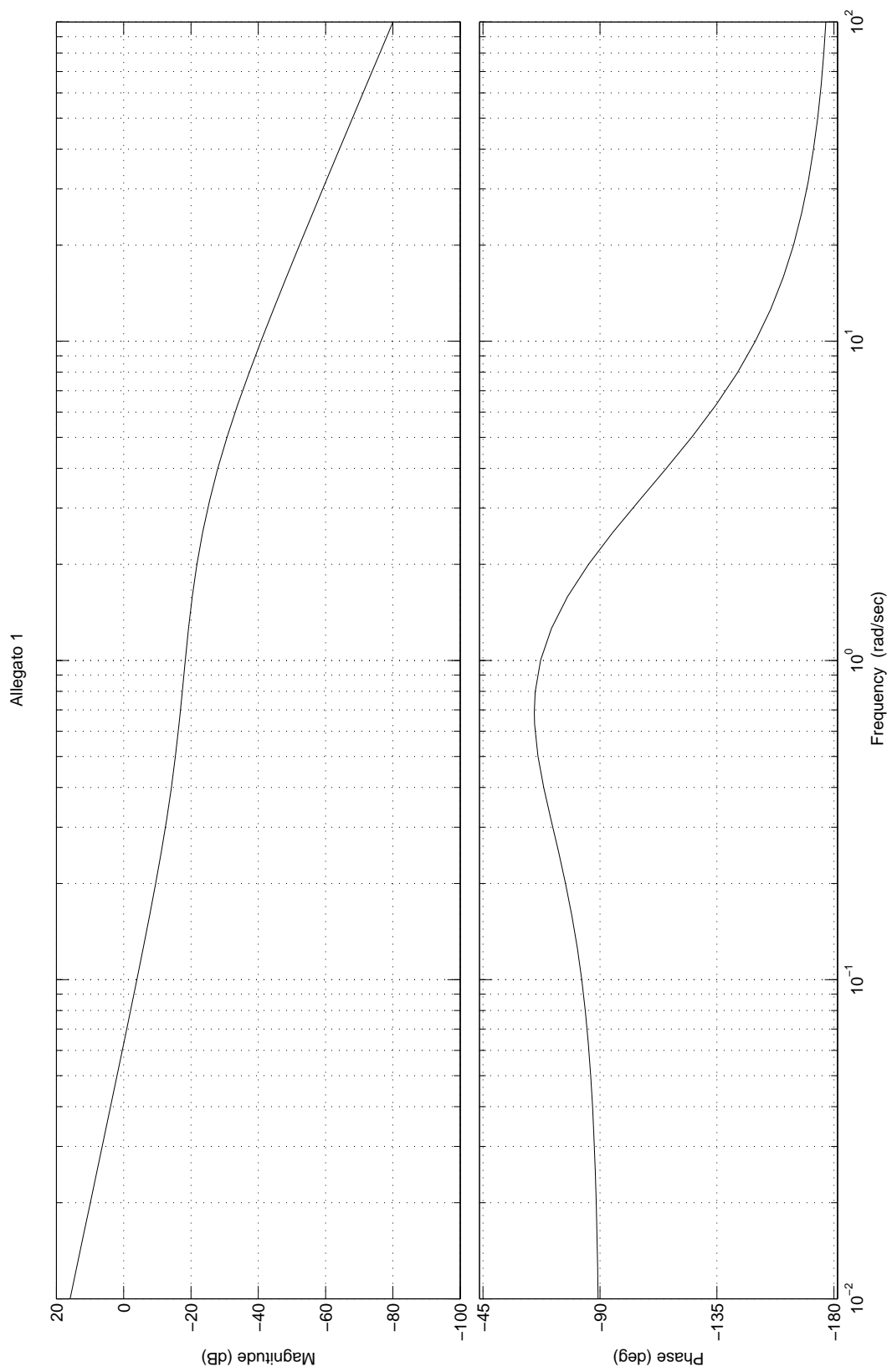


Figura 7.7: Diagramma di bode dell'esercizio 7.5

Il guadagno  $K$  del regolatore deve dare  $27.99 - 4.01 = 23.98dB$

$$K = 10^{\frac{23.98}{20}} = 15.81$$



## 7.6 Esercizio

Un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

utilizzato in feedback unitario viene regolato tramite un regolatore *lead* in modo da ottenere le prestazioni seguenti:

$$e_{\infty} < 4\%$$

con entrata rampa unitaria, e

$$PM \geq 60^{\circ}$$

Sviluppare il regolatore *lead* utilizzando il diagramma di bode allegato della funzione  $G(s)$  (Figura 7.8).

**Soluzione:** L'errore dato, per un'entrata gradino, con un sistema di tipo 1, ci permette di calcolare il valore minimo dell'amplificazione  $K$ .

$$\frac{1}{K/4} \leq 0.04 \rightarrow K \geq 100$$

Nel diagramma di Bode fornito dobbiamo ridisegnare la riga di  $0dB$  in corrispondenza di  $-40dB$ .

A questo punto si può leggere il margine di fase in questo punto, che vale ca.  $23^{\circ}$ . Occorre fornire tramite il regolatore *lead*  $60 - 23.4 + 5 = 42.4^{\circ} \simeq 45^{\circ}$ .

Per dare questo contributo di fase occorre utilizzare un valore di  $\alpha$  pari a

$$\alpha = \frac{1 + \sin(45)}{1 - \sin(45)} = 5.83$$

La nuova  $\omega_{gc}$  in questo caso è quella dove il valore del guadagno nel diagramma di Bode vale

$$-10 * \log_{10}(\alpha) = -7.655dB$$

Questo valore del guadagno è circa in corrispondenza della frequenza di 15.3 rad/s.

A questo punto si può calcolare il valore di  $T$  pari a

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \omega_{gc}} = 0.027$$

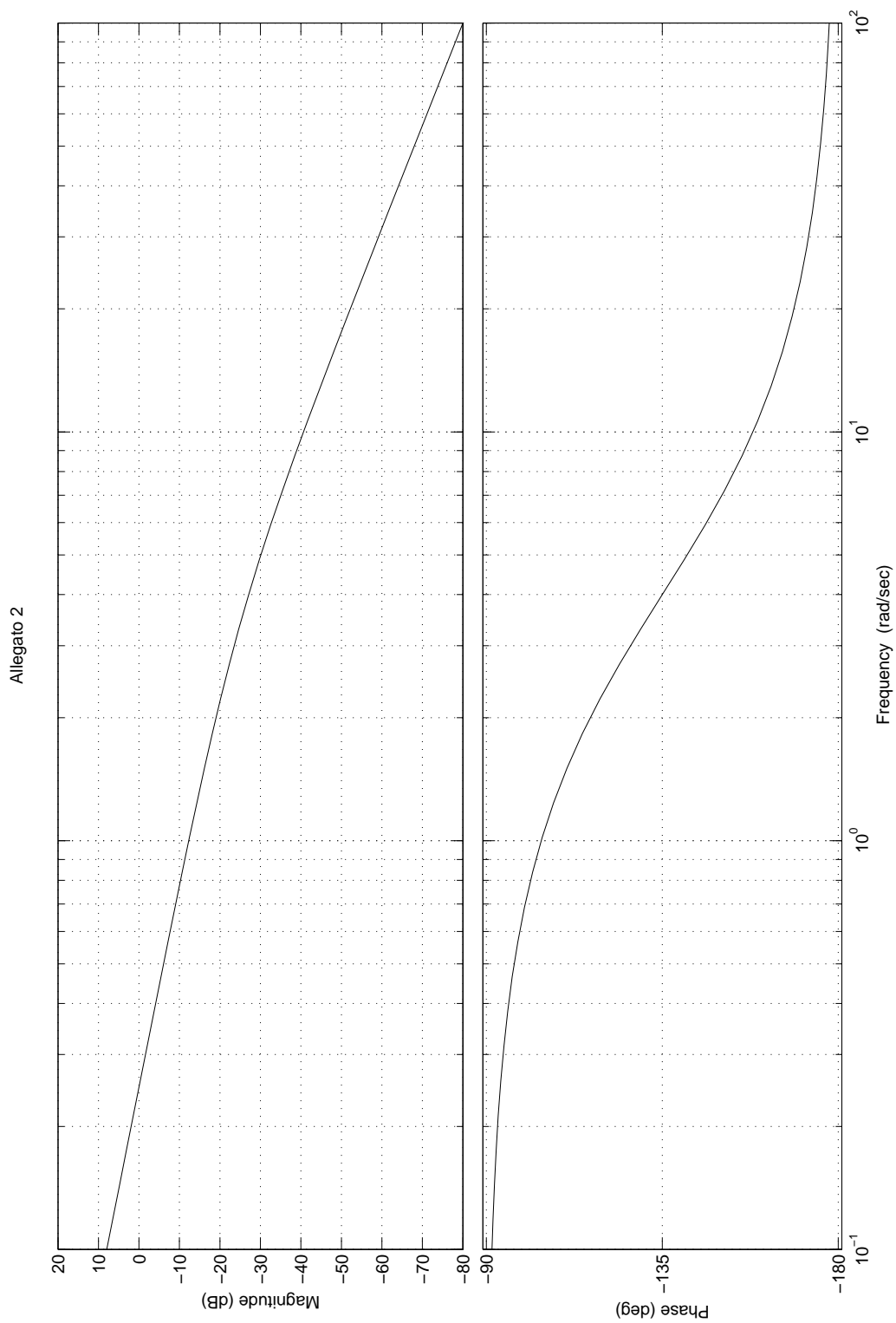


Figura 7.8: Diagramma di bode dell'esercizio 7.6

## 7.7 Controllore PI+Lead

Un processo ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 10 \cdot s}$$

Le specifiche di progetto sono le seguenti:

$$\omega_{gc} = 20 \text{ rad/s}$$

$$PM = 65^\circ$$

Il tempo della parte di compensazione integrale vale

$$T_i = 0.2$$

Determinare il controllore formato da una parte PI e una parte Lead che permette di ottenere le specifiche desiderate.

**Soluzione:** La parte PI del controllore vale

$$G_{PI} = \frac{1 + 0.2 \cdot s}{0.2 \cdot s}$$

A  $20 \text{ rad/s}$  abbiamo quindi una fase pari a  $-167^\circ$ . Per ottenere il PM desiderato pari a  $65^\circ$  (quindi una fase di  $-115^\circ$ ) occorre aggiungere in questo punto

$$167^\circ - 115^\circ = 52^\circ$$

Il valore di  $\alpha$  vale quindi

$$\alpha = \frac{1 + \sin(52^\circ)}{1 - \sin(52^\circ)} = 8.4344$$

A questo punto si può calcolare il valore della costante di tempo del regolatore lead

$$T_{lead} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \omega_{gc}} = 0.0172$$

Il regolatore lead risulta quindi essere

$$G_{Lead} = \frac{1 + \alpha \cdot T_{lead} \cdot s}{1 + T_{lead} \cdot s} = \frac{1 + 0.1452 \cdot s}{1 + 0.01722 \cdot s}$$

Il guadagno della funzione  $G_{PI}(s) \cdot G_{Lead}(s) \cdot G(s)$  a  $20rad/s$  vale  $-23.5dB$ .

Pertanto il valore necessario a portare il sistema ad avere  $0dB$  a  $20rad/s$  vale

$$K = 10^{\frac{23.5}{20}} = 14.96$$

Il controllore complessivo è quindi

$$G_C = K \cdot G_{PI} \cdot G_{Lead} = 14.96 \cdot \frac{1 + 0.2 \cdot s}{0.2 \cdot s} \cdot \frac{1 + 0.1452 \cdot s}{1 + 0.01722 \cdot s}$$

## 7.8 Controllore PI+Lead

Un processo ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 5 \cdot s}$$

Le specifiche di progetto sono le seguenti:

$$\omega_{gc} = 20 \text{ rad/s}$$

$$PM = 65^\circ$$

Il tempo della parte di compensazione integrale vale

$$T_i = 0.4$$

Determinare il controllore formato da una parte PI e una parte Lead che permette di ottenere le specifiche desiderate.

**Soluzione:** La parte PI del controllore vale

$$G_{PI} = \frac{1 + 0.4 \cdot s}{0.4 \cdot s}$$

A  $20 \text{ rad/s}$  abbiamo quindi una fase pari a  $-173^\circ$ . Per ottenere il PM desiderato pari a  $65^\circ$  (quindi una fase di  $-115^\circ$ ) occorre aggiungere in questo punto

$$173^\circ - 115^\circ = 58^\circ$$

Il valore di  $\alpha$  vale quindi

$$\alpha = \frac{1 + \sin(58^\circ)}{1 - \sin(58^\circ)} = 12.1621$$

A questo punto si può calcolare il valore della costante di tempo del regolatore lead

$$T_{lead} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \omega_{gc}} = 0.0143$$

Il regolatore lead risulta quindi essere

$$G_{Lead} = \frac{1 + \alpha \cdot T_{lead} \cdot s}{1 + T_{lead} \cdot s} = \frac{1 + 0.1744 \cdot s}{1 + 0.01434 \cdot s}$$

Il guadagno della funzione  $G_{PI}(s) \cdot G_{Lead}(s) \cdot G(s)$  a  $20rad/s$  vale  $-27.4dB$ .

Pertanto il valore necessario a portare il sistema ad avere  $0dB$  a  $20rad/s$  vale

$$K = 10^{\frac{27.4}{20}} = 23.4423$$

Il controllore complessivo è quindi

$$G_C = K \cdot G_{PI} \cdot G_{Lead} = 23.4423 \cdot \frac{1 + 0.4 \cdot s}{0.4 \cdot s} \cdot \frac{1 + 0.1744 \cdot s}{1 + 0.01434 \cdot s}$$

## 7.9 Controllore PI+Lead

Un processo ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + 8 \cdot s}$$

Le specifiche di progetto sono le seguenti:

$$\omega_{gc} = 10 \text{ rad/s}, PM = 60^\circ$$

Il tempo della parte di compensazione integrale vale

$$T_i = 0.2 \text{ s}$$

Determinare il controllore formato da una parte PI e una parte Lead che permette di ottenere le specifiche desiderate.

**Soluzione:** La parte PI del controllore vale

$$G_{PI} = \frac{1 + 0.2 \cdot s}{0.2 \cdot s}$$

A 10 rad/s si riscontra una fase pari a  $-168^\circ$ . Per ottenere il PM desiderato pari a  $60^\circ$  (quindi una fase di  $-120^\circ$ ) occorre aggiungere in questo punto

$$168^\circ - 120^\circ = 48^\circ$$

Il valore di  $\alpha$  vale quindi

$$\alpha = \frac{1 + \sin(48^\circ)}{1 - \sin(48^\circ)} = 6.7865$$

A questo punto si può calcolare il valore della costante di tempo del regolatore lead

$$T_{lead} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \omega_{gc}} = 0.03839$$

Il regolatore lead risulta quindi essere

$$G_{Lead} = \frac{1 + \alpha \cdot T_{lead} \cdot s}{1 + T_{lead} \cdot s} = \frac{1 + 0.2605 \cdot s}{1 + 0.03839 \cdot s}$$

Il guadagno della funzione  $G_{PI}(s) \cdot G_{Lead}(s) \cdot G(s)$  a 10 rad/s vale  $-14.8dB$ .

Pertanto il valore necessario a portare il sistema ad avere  $0dB$  a  $10 \text{ rad/s}$  vale

$$K = 10^{\frac{14.8}{20}} = 5.4961$$

Il controllore complessivo è quindi

$$G_C = K \cdot G_{PI} \cdot G_{Lead} = 5.4961 \cdot \frac{1 + 0.2 \cdot s}{0.2 \cdot s} \cdot \frac{1 + 0.2605 \cdot s}{1 + 0.03839 \cdot s}$$



## 7.10 Analisi di Bode

Dato è il sistema rappresentato della figura 7.9. La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 2) \cdot (s + 10)}$$

Il diagramma di Bode del processo con il controllore  $K = 1$  è dato nella figura 7.10.

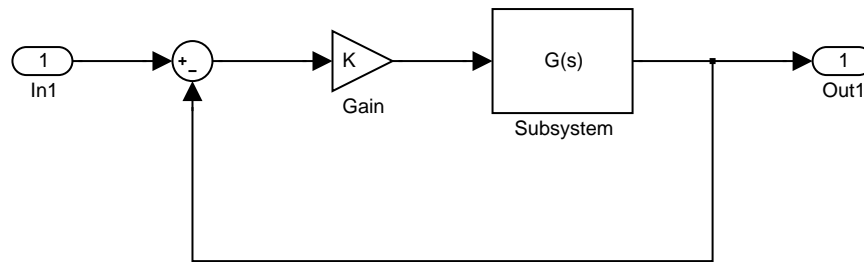


Figura 7.9: Sistema dell'esercizio 7.10

1. Determinare il valore di  $K$  che permette di ottenere un errore allo stato finito inferiore a 0.2 con una rampa unitaria come entrata.
2. Con questo valore di  $K$  stimare **dal diagramma di Bode**
  - (a) Il valore percentuale di sovralongazione ( $\%OS$ ) con entrata gradino.
  - (b) Il valore del tempo di settling  $T_s$  con entrata gradino.

**Attenzione: i dati vanno trovati senza passare dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso.**

**Soluzione:** La specifica di errore richiede un valore di  $K_V$  (costante di velocità) pari a 5

Di conseguenza

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K \cdot G(s) = 5 = \frac{K}{20} = 5 \rightarrow K = 100$$

Il diagramma di Bode viene quindi traslato verso l'alto di

$$20 \log_{10} 100 = 40dB$$

Basta quindi ritracciare la riga di  $0dB$  in corrispondenza degli attuali  $-40dB$

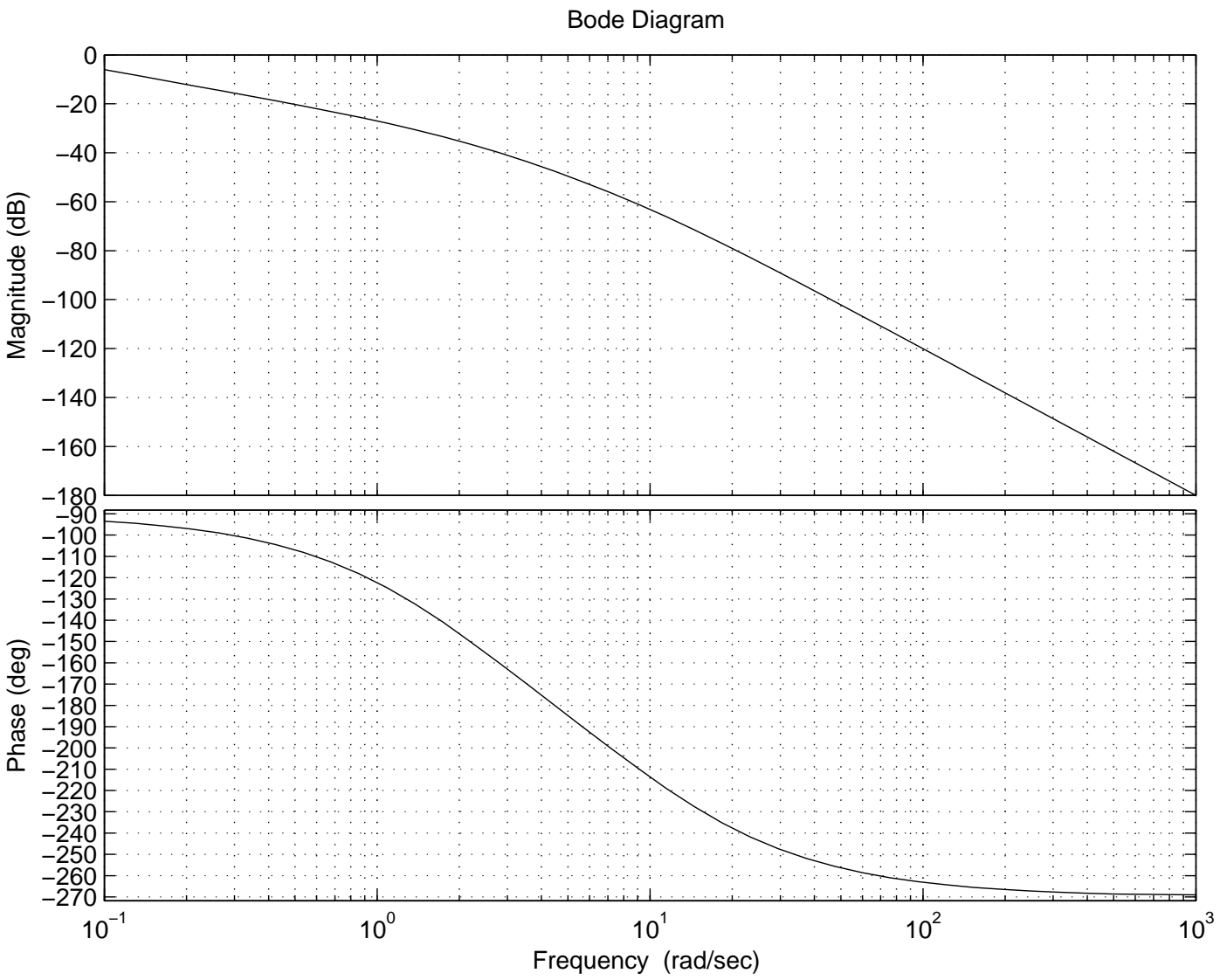


Figura 7.10: Diagramma di Bode del sistema dell'esercizio 7.10

Sul diagramma di Bode si possono ora leggere le due informazioni di  $PM = 20^\circ$  a  $2.8 \text{ rad/s}$ . È quindi possibile stimare che

$$PM = 20^\circ \rightarrow \xi = 0.175 \rightarrow \%OS = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 57.2\%$$

Possiamo anche stimare che

$$\omega_n \simeq \omega_{gc} = 2.8$$

e quindi il tempo di setting vale

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} = 8.02s$$

## 7.11 Controllore PI+Lead

Un processo ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 10 \cdot s}$$

Le specifiche di progetto sono le seguenti:

$$\omega_{gc} = 12 \text{ rad/s}, PM = 65^\circ$$

Il tempo della parte di compensazione integrale vale

$$T_i = 0.2 \text{ s}$$

Determinare il controllore formato da una parte PI e una parte Lead che permette di ottenere le specifiche desiderate.

**Soluzione:** La parte PI del controllore vale

$$G_{PI} = \frac{1 + 0.2 \cdot s}{0.2 \cdot s}$$

A 10 rad/s si riscontra una fase pari a  $-163^\circ$ . Per ottenere il PM desiderato pari a  $60^\circ$  (quindi una fase di  $-120^\circ$ ) occorre aggiungere in questo punto

$$163^\circ - 115^\circ = 48^\circ$$

Il valore di  $\alpha$  vale quindi

$$\alpha = \frac{1 + \sin(48^\circ)}{1 - \sin(48^\circ)} = 6.78$$

A questo punto si può calcolare il valore della costante di tempo del regolatore lead

$$T_{lead} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \omega_{gc}} = 0.032$$

Il regolatore lead risulta quindi essere

$$G_{Lead} = \frac{1 + \alpha \cdot T_{lead} \cdot s}{1 + T_{lead} \cdot s} = \frac{1 + 0.2171 \cdot s}{1 + 0.03199 \cdot s}$$

Il guadagno della funzione  $G_{PI}(s) \cdot G_{Lead}(s) \cdot G(s)$  a 12 rad/s vale  $-24.4dB$ .

Pertanto il valore necessario a portare il sistema ad avere  $0dB$  a 12 rad/s vale

$$K = 10^{\frac{24.4}{20}} = 16.6$$

Il controllore complessivo è quindi

$$G_C = K \cdot G_{PI} \cdot G_{Lead} = \frac{0.7206 \cdot s^2 + 6.922 \cdot s + 16.6}{0.006398 \cdot s^2 + 0.2 \cdot s}$$

## 7.12 Analisi di Bode

Dato è il sistema rappresentato della figura 7.11. La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{5}{s \cdot (s + 2.5) \cdot (s + 20)}$$

Il diagramma di Bode del processo con il controllore  $K = 1$  è dato nella figura 7.12.

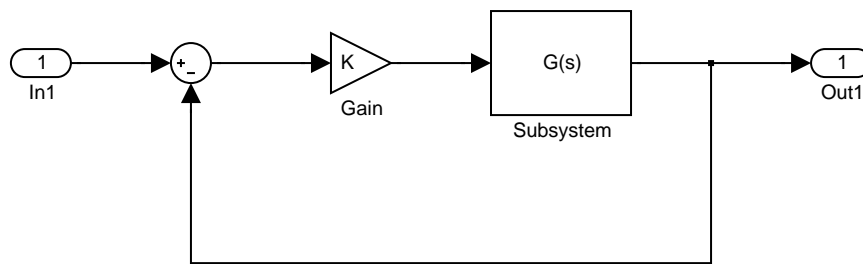


Figura 7.11: Sistema dell'esercizio 7.12

1. Determinare il valore di  $K$  che permette di ottenere un errore allo stato finito inferiore a 0.1 con una rampa unitaria come entrata.
2. Con questo valore di  $K$  stimare **dal diagramma di Bode**
  - (a) Il valore percentuale di sovraelongazione ( $\%OS$ ) con entrata gradino.
  - (b) Il valore del tempo di settling  $T_s$  con entrata gradino.

**Attenzione: i dati vanno trovati senza passare dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso.**

**Soluzione:** La specifica di errore richiede un valore di  $K_V$  (costante di velocità) pari a 10

Di conseguenza

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K \cdot G(s) = 10 = \frac{5 * K}{50} = 5 \rightarrow K = 100$$

Il diagramma di Bode viene quindi traslato verso l'alto di

$$20 \log_{10} 100 = 40dB$$

Basta quindi ritracciare la riga di  $0dB$  in corrispondenza degli attuali  $-40dB$

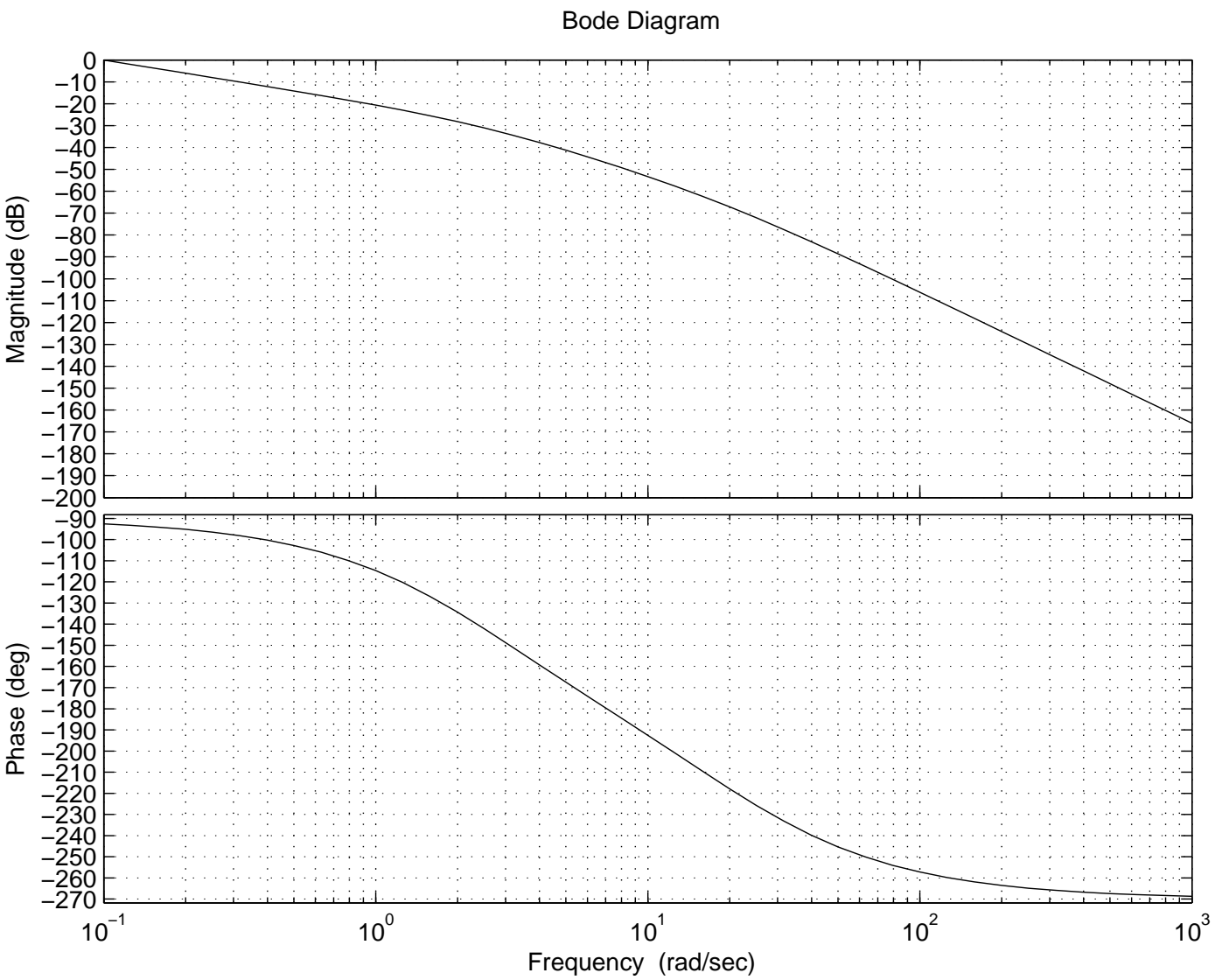


Figura 7.12: Diagramma di Bode del sistema dell'esercizio 7.12

Sul diagramma di Bode si possono ora leggere le due informazioni di  $PM = 15.3$  a  $4.63$  rad/s. È quindi possibile stimare che

$$PM = 15.3^\circ \rightarrow \xi = 0.1331 \rightarrow \%OS = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 65.6\%$$

Possiamo anche stimare che

$$\omega_n \simeq \omega_{gc} = 4.63$$

e quindi il tempo di setting vale

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} = 6.36s$$



# Capitolo 8

## Sistemi non lineari

### 8.1 Esercizio

Un sistema non lineare è rappresentato dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2^2 + 2 \cdot u\end{aligned}$$

L'entrata  $u(t)$  è rappresentata da un gradino unitario.  
Determinare

1. I punti di equilibrio  $(x_1, x_2)$  del sistema non lineare
2. Il sistema linearizzato associato ad ogni coppia di punti di equilibrio trovati in (1)
3. La stabilità di ogni sistema trovato in (2)

**Soluzione:** I punti di equilibrio con entrata gradino unitario sono dati da

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

Da cui si ricavano 2 soluzioni

$$x_1 = x_2 = -1$$

e

$$x_1 = x_2 = 1$$

La linearizzazione del sistema utilizzandole derivate parziali fornisce

$$A = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial(-x_1 + x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-x_1 + x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-x_1^2 - x_2^2 + 2 \cdot u)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-x_1^2 - x_2^2 + 2 \cdot u)}{\partial x_2} \end{array} \right] \Bigg|_{x_0, u_0} \quad \text{e} \quad B = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial(-x_1 + x_2)}{\partial u} \\ \frac{\partial(-x_1^2 - x_2^2 + 2 \cdot u)}{\partial u} \end{array} \right] \Bigg|_{x_0, u_0}$$

ottenendo

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -2 \cdot x_1 & -2 \cdot x_2 \end{array} \right] \Bigg|_{x_0, u_0} \quad \text{e} \quad B = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right] \Bigg|_{x_0, u_0}$$

Le due soluzioni sono quindi:

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad B = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right] \quad (8.1)$$

e

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad B = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right] \quad (8.2)$$

I poli del sistema sono gli zeri del polinomio caratteristico. Nel caso 8.1 valgono  $-1.5 \pm 1.323j$ , sono nel semipiano sinistro e quindi il sistema è stabile.

Nel caso 8.2 valgono  $-1.561$  e  $2.562$ , uno è nel semipiano destro e quindi il sistema è instabile.

## 8.2 Esercizio

Un sistema non lineare è rappresentato dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \sin(x)^3 \\ \dot{y} &= -4x - \sin(y)^3\end{aligned}$$

Determinare

1. Il sistema lineare nel punto  $x = 0, y = 0$ .
2. La stabilità del sistema all'origine  $\{0, 0\}$ .

### Soluzione:

Per prima cosa facciamo una sostituzione di variabile per usare le variabili di stato  $x_1 = x$  e  $x_2 = y$ .

La linearizzazione del sistema utilizzandole derivate parziali fornisce

$$A = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial(x_2 - \sin(x_1)^3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_2 - \sin(x_1)^3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-4 \cdot x_1 - \sin(x_2)^3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-4 \cdot x_1 - \sin(x_2)^3)}{\partial x_2} \end{array} \right] \Bigg|_{x_0}$$

La matrice  $B$  è nulla. Si ottiene quindi il sistema lineare

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -3 \cdot \sin(x_1)^2 \cdot \cos(x_1) & 1 \\ -4 & -3 \cdot \sin(x_2)^2 \cdot \cos(x_2) \end{array} \right] \Bigg|_{x_0}$$

La soluzione è quindi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

I poli del sistema sono gli zeri del polinomio caratteristico e sono quindi la soluzione di

$$\det(sI - A) = 0 = s^2 + 4 = \pm 2j$$

I poli sull'asse immaginario indicano un sistema stabile (non asintoticamente).

### 8.3 Esercizio

Viene dato il sistema nonlineare descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \cdot u \\ \dot{x}_2 &= -1 + x_2 \cdot u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Determinare

1. Il punto di equilibrio del sistema con entrata  $u(t) = \alpha \cdot x_1(t)$ .
2. Il range dei valori di  $\alpha$  per i quali il sistema è asintoticamente stabile nell'intorno di questo punto di equilibrio.

**Soluzione:** Il punto di equilibrio è quello in cui le derivate sono nulle. Pertanto vale

$$\begin{aligned}0 &= -x_1 + \alpha \cdot x_1 \cdot x_2 \\ 0 &= -1 + \alpha \cdot x_1 \cdot x_2\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si trova che  $\alpha \cdot x_1 \cdot x_2 = 1$ . Inserendolo nella prima equazione si trova

$$x_1 = 1$$

e poi conseguentemente

$$x_2 = \frac{1}{\alpha}$$

La linearizzazione del processo fornisce la matrice  $A$  seguente

$$A = \begin{bmatrix} -1 + \alpha \cdot x_2 & \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 & \alpha \cdot x_1 \end{bmatrix}$$

Il valore di questa matrice al punto di equilibrio è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$s^2 - \alpha \cdot s - \alpha$$

le cui soluzioni danno

$$s_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \cdot \alpha}}{2}$$

Gli autovalori della matrice  $A$  devono essere nel semipiano sinistro (condizione di stabilità!), condizione che si realizza quando

$$\alpha < 0$$

## 8.4 Linearizzazione

Dato è il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2 \cdot x_2^2 + 3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \\ y &= x_2 \end{cases} \quad (8.3)$$

1. Trovare i punti di equilibrio del sistema.
2. Linearizzare il sistema attorno all'origine.
3. Trovare la funzione di trasferimento del sistema linearizzato attorno all'origine.
4. Determinare la stabilità del sistema attorno all'origine.
5. Determinare la stabilità del sistema: è globalmente stabile/instabile come attorno all'origine (ev. dimostra con alcuni punti di lavoro)?

**Soluzione:**

1. Per un punto di equilibrio qualsiasi l'equazione (8.3) fornisce

$$\begin{cases} 0 &= -2 \cdot x_2^2(0) + 3 + u(0) \\ 0 &= x_1(0) + x_2(0) \end{cases}$$

e quindi in funzione di un  $u_0$  dato

$$x_2(0) = \pm \sqrt{\frac{3 + u(0)}{2}}$$

e

$$x_1(0) = -x_2(0)$$

2. La linearizzazione fornisce

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \cdot x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \cdot \delta u$$

Il sistema linearizzato attorno all'origine  $u_0 = 0$ ,  $x_2(0) = x_3(0) = 0$  diventa allora

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

3. La funzione di trasferimento è data da

$$\begin{aligned} G(z) &= C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D \\ &= [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{s^2 - s} \end{aligned}$$

4. I modi sono dati da

$$\det(s \cdot I - A) = s^2 - 1 = 0$$

cioè sono  $s = 1$  e  $s = -1$ . Siccome i modi del sistema linearizzato attorno all'origine hanno parte reale positiva il sistema è instabile attorno a questo punto.

5. Il sistema è globalmente instabile. Infatti il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

il polinomio caratteristico è

$$p(s) = s^2 - s + 2 \cdot x_2(0)$$

che ha sempre almeno una radice con parte reale positiva (entrambe con parte reale positiva se complessi, una o due se si tratta di radici reali)

## 8.5 Linearizzazione

Dato è il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2 \cdot x_2^2 + 4 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \\ y &= 2x_2 \end{cases} \quad (8.4)$$

1. Trovare i punti di equilibrio del sistema.
2. Linearizzare il sistema attorno all'origine.
3. Trovare la funzione di trasferimento del sistema linearizzato attorno all'origine.
4. Determinare la stabilità del sistema attorno all'origine.
5. Determinare la stabilità del sistema: è globalmente stabile/instabile come attorno all'origine (ev. dimostra con alcuni punti di lavoro)?

**Soluzione:**

1. Per un punto di equilibrio qualsiasi l'equazione (8.4) fornisce

$$\begin{cases} 0 &= -2 \cdot x_2^2(0) + 4 + u(0) \\ 0 &= 2x_1(0) + x_2(0) \end{cases}$$

e quindi in funzione di un  $u_0$  dato

$$x_2(0) = \pm \sqrt{\frac{4 + u(0)}{2}}$$

e

$$x_1(0) = -\frac{x_2(0)}{2}$$

2. La linearizzazione fornisce

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \cdot x_2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \cdot \delta u$$

Il sistema linearizzato attorno all'origine  $u_0 = 0$ ,  $x_2(0) = x_3(0) = 0$  diventa allora

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

3. La funzione di trasferimento è data da

$$\begin{aligned} G(z) &= C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D \\ &= [0 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} s & 0 \\ -2 & s - 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{4}{s^2 - s} \end{aligned}$$



4. I modi sono dati da

$$\det(s \cdot I - A) = s^2 - 1 = 0$$

cioè sono  $s = 1$  e  $s = -1$ . Siccome i modi del sistema linearizzato attorno all'origine hanno parte reale positiva il sistema è instabile attorno a questo punto.

5. Il sistema è globalmente instabile. Infatti il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \cdot x_2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

ha il polinomio caratteristico è

$$p(s) = s^2 - s + 8 \cdot x_2(0)$$

che ha sempre almeno una radice con parte reale positiva (entrambe con parte reale positiva se complessi, una o due se si tratta di radici reali)

## 8.6 Sistemi non lineari

Viene dato il pendolo di figura 8.1.

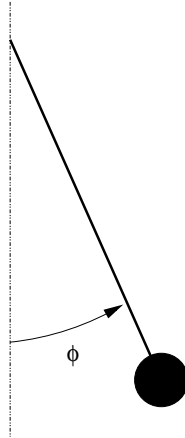


Figura 8.1: Sistema dell'esercizio 8.6

La sua equazione differenziale vale:

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi} + 5 \cdot \sin(\phi)$$

Determinare il sistema nello spazio degli stati con le variabili

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Dimostrare che il sistema linearizzato attorno al punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è stabile, mentre quello attorno al punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

non lo è.

**Soluzione:** La rappresentazione di stato del sistema vale

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5 \sin(x_1) - x_2 \end{aligned}$$

Il sistema linearizzato diventa quindi

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 \cdot \cos(x_1) & -1 \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Nel punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la matrice  $A$  vale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

con autovalori  $-0.5 \pm 2.779 \cdot i$  risultando quindi un sistema **stabile** attorno a questo punto.

Nel punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

la matrice  $A$  vale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

con autovalori  $-2.7913$  e  $1.7913$  risultando quindi un sistema **instabile** attorno a questo punto.

## 8.7 Sistemi non lineari

Viene dato il sistema di figura 8.2.

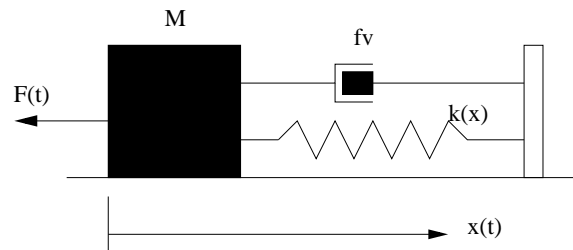


Figura 8.2: Sistema dell'esercizio 8.7

Il coefficiente della molla non è lineare, ma dipende dalla posizione  $x$  secondo la funzione seguente:

$$k(x) = 2x + 0.5$$

La massa vale  $1Kg$  e il coefficiente d'attrito vale  $fv = 0.1$ .

Determinare:

- La rappresentazione di stato del sistema, utilizzando come variabili di stato la posizione della massa  $M$  e la sua velocità.
- Il sistema linearizzato attorno al punto d'equilibrio  $x = 0$ .
- La stabilità del sistema attorno al punto d'equilibrio.

**Soluzione:** La rappresentazione di stato del sistema vale

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2 \cdot x_1^2 - 0.5 \cdot x_1 - 0.1 \cdot x_2 + F(t) \end{aligned}$$

Il sistema linearizzato diventa quindi

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 \cdot x_1 - 0.5 & -0.1 \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Il punto d'equilibrio vale

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice  $A$  diventa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Con autovalori

$$\begin{bmatrix} -0.05 + i * 0.7053368 \\ -0.05 - i * 0.7053368 \end{bmatrix}$$

che sono nel semipiano sinistro e pertanto il sistema è asintoticamente stabile.



# Capitolo 9

## Sistemi discreti

### 9.1 Esercizio

Un sistema discreto è rappresentato dalla funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 2 \cdot z + 1}$$

Viene regolato tramite un regolatore discreto con funzione di trasferimento pari a

$$G_c(z) = K \cdot \frac{z - a}{z - b}$$

Il sistema globale è rappresentato nella figura 9.1.

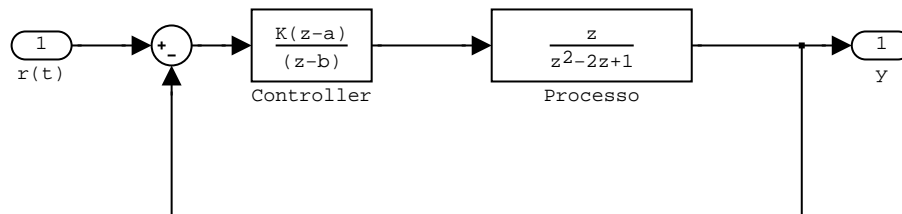


Figura 9.1: Sistema dell'esercizio 9.1

Determinare

1. I valori di  $K$ ,  $a$  e  $b$  che permettono di portare tutti i poli del sistema ad anello chiuso all'origine.
2. Le funzioni di trasferimento  $Y(z)/R(z)$  e  $U(z)/R(z)$  utilizzando il diagramma di flusso di segnali della figura 9.2 e i valori trovati in (1).
3. I primi 5 valori dell'uscita  $y_k$  utilizzando la funzione  $Y(z)/R(z)$  trovata in (2) (condizioni iniziali nulle).
4. I primi 5 valori del segnale di controllo  $u_k$ , all'uscita del controllore  $G_c(z)$ , utilizzando la funzione  $U(z)/R(z)$  trovata in (2) (condizioni iniziali nulle).

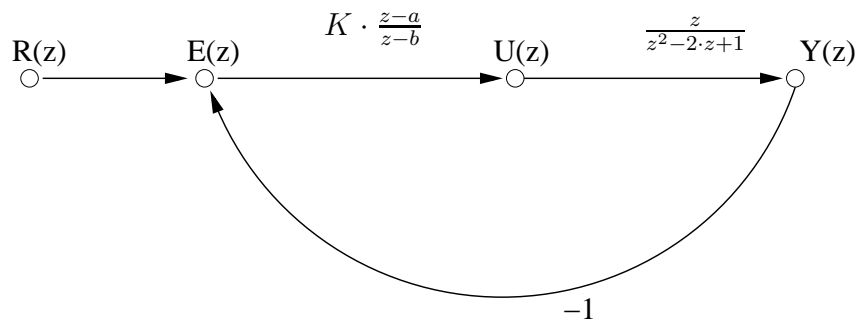


Figura 9.2: Diagramma di flusso per la domanda 2 dell'esercizio 9.1

**Soluzione:** La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{cl} = \frac{K \cdot \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{z}{z^2-2z+1}}{1 + K \cdot \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{z}{z^2-2z+1}}$$

e si ottiene

$$G_{cl} = \frac{K \cdot z^2 - K \cdot a \cdot z}{z^3 + (K - 2 - b) \cdot z^2 + (1 + 2 \cdot b - K \cdot a) \cdot z - b}$$

Se i poli sono tutti a 0, il denominatore vale  $z^3$ .

Con un paragone di coefficienti si ricava

$$b = 0$$

$$K - 2 - b = 0 \rightarrow K = 2$$

$$1 + 2 \cdot b - K \cdot a = 0 \rightarrow a = 0.5$$

Con i valori trovati, utilizzando il diagramma di flusso di segnale si ottiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{2 \cdot z - 1}{z^2}$$

e



$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{2 \cdot z^3 - 5 \cdot z^2 + 4 \cdot z - 1}{z^3}$$

L' equazione alle differenze associata a  $y$  vale

$$y_{k+1} = 2 \cdot r_k - r_{k-1}$$

La sequenza associata a questa equazione alle differenze vale

$$y = 0, 2, 1, 1, 1, \dots$$

L' equazione alle differenze associata a  $u$  vale

$$u_k = 2 \cdot r_k - 5 \cdot r_{k-1} + 4 \cdot r_{k-2} - r_{k-3}$$

La sequenza associata alla variabile  $u$  vale

$$u = 2, -3, 1, 0, 0, \dots$$

## 9.2 Esercizio

Un sistema discreto è rappresentato dalla funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 5 \cdot z + 4}$$

Viene regolato tramite un regolatore discreto con funzione di trasferimento pari a

$$G_c(z) = K \cdot \frac{z - a}{z - b}$$

Il sistema globale è rappresentato nella figura 9.3.

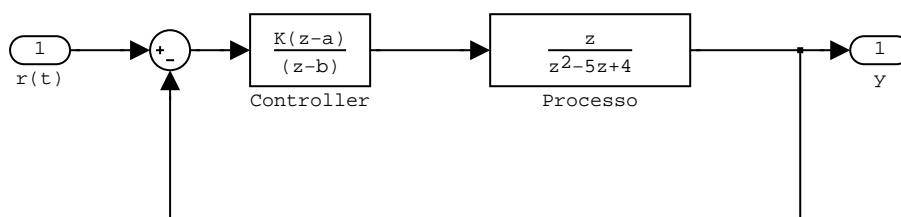


Figura 9.3: Sistema dell'esercizio 9.2

Determinare

1. I valori di  $K$ ,  $a$  e  $b$  che permettono di portare tutti i poli del sistema ad anello chiuso all'origine.
2. Le funzioni di trasferimento  $Y(z)/R(z)$  e  $U(z)/R(z)$  utilizzando il diagramma di flusso di segnali della figura 9.4 e i valori trovati in (1).
3. I primi 5 valori dell'uscita  $y_k$  utilizzando la funzione  $Y(z)/R(z)$  trovata in (2) (condizioni iniziali nulle).
4. I primi 5 valori del segnale di controllo  $u_k$ , all'uscita del controllore  $G_c(z)$ , utilizzando la funzione  $U(z)/R(z)$  trovata in (2) (condizioni iniziali nulle).

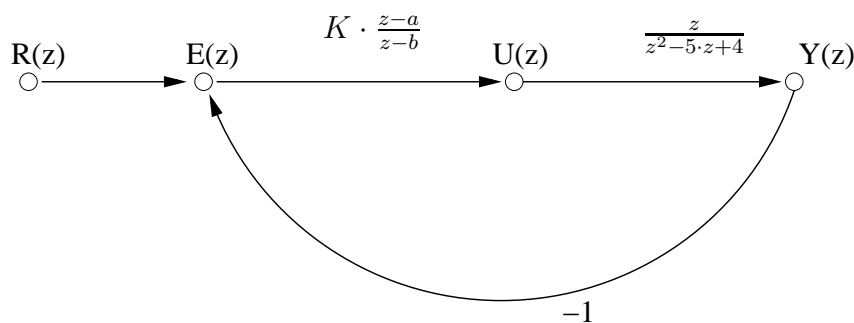


Figura 9.4: Diagramma di flusso per la domanda 2 dell'esercizio 9.2

**Soluzione:** La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{cl} = \frac{K \cdot \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{z}{z^2-5z+4}}{1 + K \cdot \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{z}{z^2-5z+4}}$$

e si ottiene

$$G_{cl} = \frac{K \cdot z^2 - K \cdot a \cdot z}{z^3 + (K - 5 - b) \cdot z^2 + (4 + 5 \cdot b - K \cdot a) \cdot z - 4b}$$

Se i poli sono tutti a 0, il denominatore vale  $z^3$ .

Con un paragone di coefficienti si ricava

$$b = 0$$

$$K - 5 - b = 0 \rightarrow K = 5$$

$$4 + 5 \cdot b - K \cdot a = 0 \rightarrow a = 0.8$$

Con i valori trovati, utilizzando il diagramma di flusso di segnale si ottiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{5 \cdot z - 4}{z^2}$$

e

$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{5 \cdot z^3 - 29 \cdot z^2 + 40 \cdot z - 16}{z^3}$$

L'equazione alle differenze associata a  $y$  vale

$$y_{k+1} = 5 \cdot r_k - 4 \cdot r_{k-1}$$

La sequenza associata a questa equazione alle differenze vale

$$y = 0, 5, 1, 1, 1, \dots$$

L'equazione alle differenze associata a  $u$  vale

$$u_k = 5 \cdot r_k - 29 \cdot r_{k-1} + 40 \cdot r_{k-2} - 16 \cdot r_{k-3}$$

La sequenza associata alla variabile  $u$  vale

$$u = 5, -24, 16, 0, 0, \dots$$

### 9.3 Esercizio

Viene dato un processo descritto dal sistema discreto

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= -x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\x_2(k+1) &= x_1(k) \\y(k) &= x_1(k)\end{aligned}$$

Le condizioni iniziali sono nulle.

Determinare

1. I primi 8 valori della risposta del sistema ad anello aperto con entrata gradino unitario.
2. Il regolatore

$$C(z) = K \cdot \frac{z-a}{z-b}$$

che permette di portare a 0.1 tutti i poli del sistema ad anello chiuso di figura 9.5

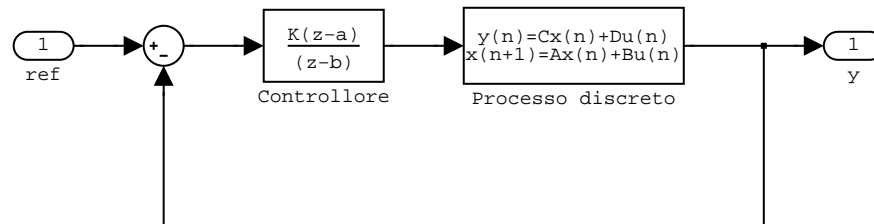


Figura 9.5: Sistema dell'esercizio 9.3

**Soluzione:** Il sistema è rappresentato nella forma dello spazio degli stati. Possiamo creare la tabella 9.1.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1$	0	1	0	2	-1	4	-4	9
$x_2$	0	0	1	0	2	-1	4	-4
$y$	0	1	0	2	-1	4	-4	9

Tabella 9.1: Valori del sistema

La funzione di trasferimento si trova da

$$G_{zoh}(z) = C \cdot (z \cdot I - \Phi(T))^{-1} \cdot \Gamma(T) + D = \frac{z}{z^2 + z - 1}$$

Il sistema ad anello chiuso con il controllore ha la funzione di trasferimento pari a

$$G_{tot}(z) = \frac{K \cdot z \cdot (z - a)}{z^3 + (K - b + 1) \cdot z^2 + (-aK - b - 1) \cdot z + b}$$

Il denominatore della funzione deve essere uguale a

$$(z - 0.1)^3 = z^3 - 0.3 \cdot z^2 + 0.03 \cdot z + 0.001$$

Un paragone di coefficienti ci dà i valori di  $a$ ,  $b$  e  $K$ .

$$b = -0.001$$

$$K - b + 1 = 0.3 \rightarrow K = -0.3 - 1 + b = -1.301$$

$$-aK - b - 1 = 0.03 \rightarrow a = -\frac{0.03 + 1 + b}{K} = 0.79$$

La funzione di trasferimento del regolatore risulta essere quindi

$$C(z) = \frac{1.029 - 1.301z}{0.001 + z}$$

mentra la funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{tot}(z) = \frac{1.029z - 1.301z^2}{-0.001 + 0.03z - 0.3z^2 + z^3}$$

## 9.4 Sistemi discreti

Viene dato il sistema descritto nella figura 9.6 con una massa  $M$  sottoposta ad una forza  $F(t)$ .

**Attenzione: non ci sono attriti né molle!**

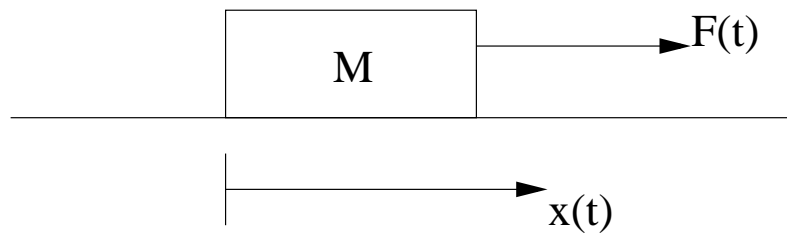


Figura 9.6: Sistema dell'esercizio 9.4

Determinare

1. il modello discreto  $G_{ZOH}(z)$  che descrive lo spostamento  $x(t)$ , campionato a  $0.1s$ , con condizioni iniziali nulle.

Viene dato un processo descritto dal sistema discreto

$$G(z) = \frac{0.1z + 0.1}{z^2 - 1.5z + 0.8}$$

Determinare

1. I primi 5 valori della risposta del sistema ad anello aperto con entrata gradino unitario e condizioni iniziali nulle.
2. Il regolatore

$$C(z) = \frac{b_1 \cdot z + b_0}{z + a_0}$$

che permette di portare a 0 tutti i poli del sistema ad anello chiuso.

3. Il programma in "C" che implementa il regolatore trovato precedentemente, misurando il valore di  $y_k$  con la funzione "get\_sensore" e scrivendo il valore di  $u_k$  partendo dalla lettura di  $y_k$  con la funzione "set\_attuatore". Il valore di riferimento è sempre 1.

**Soluzione:**

- Il sistema è descritto dall'equazione differenziale

$$M \cdot \ddot{x} = F$$

che in Laplace diventa

$$X(s) = \frac{F(s)}{M \cdot s^2}$$

La funzione di trasferimento diventa quindi

$$G(s) = \frac{1/M}{s^2}$$

Applicando le regole per il calcolo della trasformata Z includendo la parte ZOH si ottiene

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

dove la funzione  $Z_s$  può essere letta dalla tabella 5.1 dello script.

Dobbiamo determinare la  $Z_s$  della funzione

$$\frac{n!}{s^{n+1}}$$

con  $n = 2$

Per la linearità calcoliamo inizialmente senza il valore  $1/M$  che aggiungeremo in seguito.

Associata a

$$\frac{1}{s^3}$$

troviamo tabellato

$$\frac{1}{2!} \cdot \left( \lim_{a \rightarrow 0} (-1)^n \cdot \frac{d^n}{da^n} \left[ \frac{z}{z - e^{-aT}} \right] \right)$$

Applicando la seconda derivata rispetto ad  $a$  diventa

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2 z T^2 e^{2aT}}{(z - e^{aT})^3} + \frac{z T^2 e^{aT}}{(z - e^{aT})^2}$$

e con  $a \rightarrow 0$  e  $t = 0.1$  si semplifica in

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{0.01 z}{(z-1)^2} + \frac{0.02 z}{(z-1)^3}$$



Aggiungendo la massa e la parte ZOH otteniamo infine

$$\frac{1}{2M} \cdot \frac{z-1}{z} \frac{0.01z}{(z-1)^2} + \frac{0.02z}{(z-1)^3}$$

che semplificato diventa

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{0.005 + 0.005z}{1 - 2z + z^2}$$

- La funzione di trasferimento va riscritta come iterazione e diventa

$$y_{k+1} = 1.5 * y_k - 0.8 * y_{k-1} + 0.1 * u_k + 0.1 * u_{k-1}$$

I primi 5 valori valgono quindi:

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ u & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y & 0 & 0.1 & 0.35 & 0.645 & 0.8875 \end{bmatrix}$$

Espandendo la funzione

$$\frac{C(z) * G(z)}{1 + C(z) * G(z)}$$

e prendendo il denominatore si ottiene l'espressione seguente

$$z^3 + \frac{b_1 z^2}{10} - a_0 z^2 - \frac{3 z^2}{2} + \frac{b_1 z}{10} - \frac{b_0 z}{10} + \frac{3 a_0 z}{2} + \frac{4 z}{5} - \frac{b_0}{10} - \frac{4 a_0}{5}$$

Raggruppando i termini e sapendo che il denominatore desiderato vale

$$z^3$$

si ottengono le tre equazioni per i coefficienti di  $z^2$ ,  $z$  e  $z^0$

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{10} + a_0 - \frac{3}{2} &= 0 \\ \frac{b_1}{10} + \frac{b_0}{10} - \frac{3 a_0}{2} + \frac{4}{5} &= 0 \\ \frac{b_0}{10} + \frac{4 a_0}{5} &= 0 \end{aligned}$$

che danno la soluzione

$$b_1 = \frac{265}{33}$$

$$b_0 = -\frac{184}{33}$$
$$a_0 = \frac{23}{33}$$

Il programma in “C” del controllore risulta quindi

```
double b1=256.0/33;
double b0=-184.0/33;
double a0=23.0/33;
double yk,uk,ek,ek_1=0,uk_1=0;

yk=get_sensore();
ek=1-yk;
uk=-a0*uk_1+b1*ek+b0*ek_1;
set_attuatore(uk);
uk_1=uk;
ek_1=ek;
```

## 9.5 Sistemi discreti

Viene dato il sistema descritto nella figura 9.7 con una massa  $M$  e attrito vischioso  $f_v$  sottoposta ad una forza  $F(t)$ .

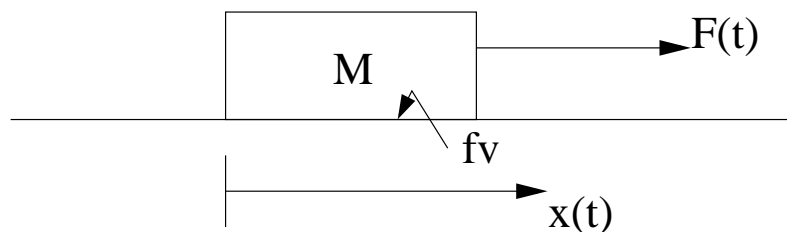


Figura 9.7: Sistema dell'esercizio 9.5

Determinare

1. il modello discreto  $G_{ZOH}(z)$  che descrive la velocità  $v(t)$ , campionato a  $T$ , con condizioni iniziali nulle.

Viene dato un processo descritto dal sistema discreto

$$G(z) = \frac{z + 1}{z^2 - 3z + 1}$$

Determinare

1. I primi 5 valori della risposta del sistema ad anello aperto con entrata gradino unitario e condizioni iniziali nulle.
2. Il regolatore

$$C(z) = \frac{b_1 \cdot z + b_0}{z + a_0}$$

che permette di portare a 0 tutti i poli del sistema ad anello chiuso.

3. Il programma in "C" che implementa il regolatore trovato precedentemente, misurando il valore di  $y_k$  con la funzione "get\_sensore" e scrivendo il valore di  $u_k$  partendo dalla lettura di  $y_k$  con la funzione "set\_attuatore". Il valore di riferimento è sempre 1.

**Soluzione:**

- Il sistema è descritto dall'equazione differenziale

$$M \cdot \dot{v} = -f_v \cdot v + F$$

che in Laplace diventa

$$V(s) = \frac{F(s)}{M \cdot s + f_v}$$

La funzione di trasferimento diventa quindi

$$G(s) = \frac{1/M}{s + \frac{f_v}{M}}$$

Applicando le regole per il calcolo della trasformata Z includendo la parte ZOH si ottiene

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z_s\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

dove la funzione  $Z_s$  può essere letta dalla tabella 5.1 dello script.

Scomponiamo per prima cosa la funzione di trasferimento  $G(s)/s$ :

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1/M}{s + f_v/M} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + f_v/M}$$

Risolvendo si trova

$$K_1 = \frac{1}{f_v}$$

e

$$K_2 = -\frac{1}{f_v}$$

Dalla tabella possiamo ora trovare le equivalenti funzioni in Z che sono

$$\frac{1/f_v}{s} \rightarrow \frac{1}{f_v} \cdot \frac{z}{z-1}$$

e

$$-\frac{1/f_v}{s + f_v/M} \rightarrow -\frac{1}{f_v} \cdot \frac{z}{z - e^{-f_v \cdot T/M}}$$

La funzione globale diventa quindi

$$G_z(z) = \frac{e^{\frac{f_v T}{M}} - 1}{f_v \left( e^{\frac{f_v T}{M}} z - 1 \right)}$$

- La funzione di trasferimento va riscritta come iterazione e diventa

$$y_{k+1} = 3 * y_k - y_{k-1} + u_k + u_{k-1}$$

I primi 5 valori valgono quindi:

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ u & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 & 5 & 16 & 45 \end{bmatrix}$$

Espandendo la funzione

$$\frac{C(z) * G(z)}{1 + C(z) * G(z)}$$

e prendendo il denominatore si ottiene l'espressione seguente

$$z^3 + b_1 z^2 + a_0 z^2 - 3 z^2 + b_1 z + b_0 z - 3 a_0 z + z + b_0 + a_0$$

Raggruppando i termini e sapendo che il denominatore desiderato vale

$$z^3$$

si ottengono le tre equazioni per i coefficienti di  $z^2$ ,  $z$  e  $z^0$

$$b_1 + a_0 - 3 = 0$$

$$b_1 + b_0 - 3 * a_0 + 1 = 0$$

$$b_0 + a_0 = 0$$

che danno la soluzione

$$b_1 = 2.2$$

$$b_0 = -0.8$$

$$a_0 = 0.8$$

Il programma in "C" del controllore risulta quindi

```
double b1=2.2;
double b0=-0.8;
double a0=0.8;
double yk,uk,ek,ek_1=0,uk_1=0;
```

```
yk=get_sensore();  
ek=1-yk;  
uk=-a0*uk_1+b1*ek+b0*ek_1;  
set_attuatore(uk);  
uk_1=uk;  
ek_1=ek;
```

## 9.6 Sistemi discreti

Viene dato il sistema discreto con funzione di trasferimento

$$G_{zoh}(z) = \frac{0.3934693}{-0.6065307 + z}$$

Determinare

1. I primi 5 valori di risposta a gradino unitario.
2. Il controllore polinomiale

$$\frac{a}{z + b}$$

che permette di portare tutti i poli del sistema ad anello chiuso a 0.

### Soluzione:

La funzione di trasferimento può essere riscritta in forma di equazione alle differenze come

$$y_{k+1} = 0.3934693 \cdot u_k + 0.6065307 \cdot y_k$$

I primi 5 valori valgono quindi:

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ u & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y & 0 & 0.3934 & 0.6321 & 0.7768 & 0.8646 \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{tot}(z) = \frac{\frac{a}{z+b} \cdot \frac{0.3934693}{z-0.6065307}}{1 + \frac{a}{z+b} \cdot \frac{0.3934693}{z-0.6065307}}$$

Il denominatore di  $G_{tot}(z)$  vale quindi

$$z^2 + (b - 0.6065307) \cdot z + (0.3934693 \cdot a - b \cdot 0.6065307)$$

da cui si ricava

$$b = 0.6065307$$

e

$$a = \frac{b \cdot 0.6065307}{0.3934693} = 0.9349634$$



## 9.7 Sistemi discreti

Viene dato il sistema discreto con funzione di trasferimento

$$G_{zoh}(z) = \frac{0.2}{-0.8 + z}$$

Determinare

1. I primi 5 valori di risposta a gradino unitario.
2. Il controllore polinomiale

$$\frac{a}{z + b}$$

che permette di portare tutti i poli del sistema ad anello chiuso a 0.1.

### Soluzione:

La funzione di trasferimento può essere riscritta in forma di equazione alle differenze come

$$y_{k+1} = 0.2 \cdot u_k + 0.8 \cdot y_k$$

I primi 5 valori valgono quindi:

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ u & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y & 0 & 0.2 & 0.36 & 0.488 & 0.5904 \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$G_{tot}(z) = \frac{\frac{a}{z+b} \cdot \frac{0.2}{z-0.8}}{1 + \frac{a}{z+b} \cdot \frac{0.2}{z-0.8}}$$

Il denominatore di  $G_{tot}(z)$  vale quindi

$$z^2 + (b - 0.8) \cdot z + (0.2 \cdot a - 0.8 \cdot b)$$

Il sistema con tutti i poli a 0.1 ha come denominatore:

$$D(z) = (z - 0.1)^2 = z^2 + 0.2 \cdot z + 0.01$$

per cui da un paragone di coefficienti si ricava

$$b = 1$$

e

$$a = \frac{b \cdot 0.8 + 0.01}{0.2} = 4.05$$